Зимний математический турнир АПО
7 февраля 2026
Профессионалы — Решения

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На стороне CD выбрана точка M так, что $CM : MD = 2:1$, а на стороне DE выбрана точка N так, что $DN : NE = 2:1$. Найдите угол между AM и BN. В ответ запишите только число градусов.

Решение.

Обозначим центр шестиугольника за O и рассмотрим поворот на 60° вокруг него в направлении обхода вершин шестиугольника. Так как шестиугольник правильный, то вершины последовательно переходят друг в друга, следовательно отрезок CD переходит в отрезок DE. В то же время точка M лежит на CD и делит его в отношении $2:1$, так как поворот сохраняет расстояния и переводит отрезки в отрезки, то сохраняется и деление отрезка в заданном соотношении, таким образом, точка M перейдёт в точку N. Из того, что точка A переходит в точку B, а точка M переходит в N, то образ отрезка AM это есть отрезок BN. Поэтому угол между AM и BN равен углу поворота, то есть 60°.

Ответ: 60 **.**

2. Для двузначного числа X считают два контрольных значения: K_1 – квадрат суммы цифр числа X, K_2 – сумма цифр числа X^2. Найдите все двузначные числа X, для которых выполнено равенство $K_1 = K_2$. В ответе расположите найденные числа в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Раз число X – двузначное, то $10 \le X \le 99$, а следовательно, $100 \le X^2 \le 9801$. Максимальная сумма цифр среди чисел меньших 9801 достигается, например, на 9799, и равна $9 + 7 + 9 + 9 = 34$. Обозначим сумму цифр числа X за $s(X)$, тогда так как $(s(X))^2 = s\left(X^2\right) \le 34$, то $s(X) \le 5$. Таким образом, остаётся всего 15 кандидатов: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50. Проводя для них проверку условия, получаем, что подходят только: $10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31$.

Ответ: $10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31$**.**

3. В городе Листограде за 30 дней фиксируют ясные и пасмурные дни. Известно, что в любом подряд идущем отрезке из 5 дней, ясных бывает не больше одного. Кроме того, в любом подряд идущем отрезке из 6 дней, ясный день будет обязательно. Сколько всего ясных дней могло быть за эти 30 дней? В ответе расположите найденные значения в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Разобьём 30 дней на 6 непересекающихся блоков по 5 дней, то есть:

$$1 - 5,\ 6 - 10,\ \ldots,\ 21 - 25,\ 26 - 30$$

Так как в каждом блоке из 5 дней ясных не более одного, то всего ясных дней не больше 6. Если же разбить 30 дней на блоки по 6 дней, то по условию в каждом из них есть хотя бы один ясный день, а значит ясных дней не меньше 5. Покажем, что варианты в 5 или 6 ясных дней достижимы. Если взять ясными каждый пятый день, то в любых пяти подряд днях может быть максимум один из этих дней, а в любые шесть подряд идущих дней обязательно попадёт хотя бы один ясный день. Аналогично, возьмём ясными каждый 6-й день, и тогда ясных дней будет ровно пять и условия задачи тоже выполняются.

Ответ: 5, 6.

4. Пятеро ребят сидят за круглым столом каждый с каким-то количеством жетонов. У первого в начале 81 жетон, а у остальных – разное количество. Они проводят 5 раундов по часовой стрелке. В своём раунде участник делает так: каждому из остальных он отдаёт столько своих жетонов, сколько у другого игрока сейчас есть. После того как все пятеро сделали это по одному разу, оказалось, что у всех стало равное количество жетонов. Сколько жетонов было у каждого из ребят в начале? Значения напишите по порядку ходов игроков через запятую без пробелов.

Решение.

Обозначим финальное общее количество жетонов у каждого через T. Заметим, что если в некотором раунде игрок раздавал жетоны, то у каждого другого стало в 2 раза больше жетонов. Следовательно, так как после пятого раунда у всех по T жетонов, то перед ним было:

$$\left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, T + 4\cdot\frac{T}{2}\right) = \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, 3T\right)$$

Продолжая данную процедуру, получаем, что перед четвёртым раундом у всех было:

$$\left(\frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{2} + 3\cdot\frac{T}{4} + \frac{3}{2}T, \frac{3}{2}T\right) = \left(\frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{11}{4}T, \frac{3}{2}T\right)$$

Перед третьим раундом:

$$\left(\frac{T}{8}, \frac{T}{8}, \frac{21}{8}T, \frac{11}{8}T, \frac{3}{4}T\right)$$

Перед вторым раундом:

$$\left(\frac{T}{16}, \frac{41}{16}T, \frac{21}{16}T, \frac{11}{16}T, \frac{3}{8}T\right)$$

И изначально было:

$$\left(\frac{81}{32}T, \frac{41}{32}T, \frac{21}{32}T, \frac{11}{32}T, \frac{3}{16}T\right)$$

Получаем: $\frac{81}{32}T = 81$, значит $T = 32$, тогда изначально у ребят было следующее количество жетонов:

$$(81, 41, 21, 11, 6)$$

Ответ: 81, 41, 21, 11, 6.

5. На заводе делают панели размера 1×1×2. Каждая панель окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Из 60 красных и 48 синих панелей собрали куб размера 6×6×6. Какое наибольшее число красных клеток может оказаться на поверхности куба?

Решение.

Так как панели имеют размер $1\times1\times2$, то будем говорить, что каждая из них состоит из кубиков размера $1\times1\times1$. Если такой единичный кубик будет стоять в углу куба, то на поверхности у него будет видно 3 клеточки, если на ребре, но не в углу, то будет видно 2 стороны, если на грани, но не на ребре, то видно 1 сторону, а если внутри, то не будет видно ни одной стороны.

Теперь заметим, что у куба 8 углов, если туда поместить красные кубики, то будет видно $8\cdot3 = 24$ красные клеточки. У куба 12 рёбер, на каждом ребре имеется 4 не угловых кубика, то есть всего их $12\cdot4 = 48$ штук, если они красные, то это даст ещё 96 красных клеточек на поверхности. На каждой грани осталось по $4\cdot4 = 16$ кубиков, у которых видно только одну сторону, тогда всего таких кубиков $6\cdot16 = 96$ штук. Красных кубиков у нас всего 120 штук, сначала будем заполнять ими углы и рёбра. Для этого нам понадобится $8 + 48 = 56$ кубиков, а их вклад будет равен $24 + 96 = 120$ красным квадратикам на поверхности куба. После этого останется ещё $120 - 56 = 64$ красных кубиков, каждый из которых в лучше случае может дать только одну красную клеточку на поверхности. Итого красных клеточек на поверхности не более чем $120 + 64 = 84$ штуки.

Покажем теперь достижимость данной оценки. Сделаем все кубики на рёбрах красными, для этого нужно 56 кубиков, то есть 28 красных панелей. После этого у нас остаётся ещё 32 красные панели, которыми мы замостим центральную часть граней. А именно, на 4 грани нужно $4\cdot16 = 64$ кубика или как раз 32 панели. Итого, мы получили: $3\cdot8 + 2\cdot4\cdot12 + 1\cdot16\cdot4 = 184$ красных квадратика.

Ответ: 184.

6. Два сервера отправляют файлы с периодами a и b секунд, $a, b\in N$. Известно, что $\text{НОК}(a, b) - \text{НОД}(a, b) = \frac{1}{5}ab$. Чему могут быть равны значения a и b, если известно, что $a < b$. В ответ запишите значения через запятую без пробелов, сначала для a, затем для b.

Решение.

Обозначим $d = \text{НОД}(a, b)$, тогда можно записать, что $a = dx$, $b = dy$, причём $\text{НОД}(x, y) = 1$. Так как x и y – взаимнопросты, то $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(dx, dy) = dxy$, также известно, что $ab = dx\cdot dy = d^2xy$. Подставляем в условие:

$$dxy - d = \frac{1}{5}d^2xy$$

$$d(xy - 1) = \frac{1}{5}d^2xy$$

Разделим на d, так как $d > 0$:

$$xy - 1 = \frac{1}{5}dxy$$

Откуда:

$$d = \frac{5(xy-1)}{xy} = 5 - \frac{5}{xy}$$

Так как d – натуральное число, то $\frac{5}{xy}$ должно быть целым, а значит $xy = 1$ или $xy = 5$. Если $xy = 1$, то $d = 5 - \frac{5}{1} = 0$, что невозможно, так как НОД$(a,\ b) > 0$. Если же $xy = 5$, то $d = 5 - \frac{5}{5} = 4$, а значит так как $xy = 5$, $(x,\ y) = (1,\ 5)$ или $(x, y) = (5, 1)$, что даёт, что $(a,\ b) = (4\cdot1,\ 4\cdot5) = (4,\ 20)$ или $(a,\ b) = (4\cdot5,\ 4\cdot1) = (20,\ 4)$. Второй вариант не подходит, так как $a < b$ по условию.

Ответ: $4, 20$.

7. В мастерской есть 14 разных гирек массами 1, 2, 3, ..., 14 граммов. Нужно взять ровно 12 гирек так, чтобы суммарная масса была равна 90 г. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Суммарная масса всех гирек равна $1 + 2 + \ ... + 14 = \frac{14\cdot15}{2} = 105$. Если выбрали 12 гирек, значит 2 гирьки были не выбраны. Обозначим их массы за x и y, соответственно. Тогда сумма выбранных равна $105 - (x + y) = 90$, следовательно $x + y = 15$. Следовательно, нужно посчитать количество различных пар чисел от 1 до 14 дающих 15 в сумме. Всего таких пар 7.

Ответ: 7.

8. В компьютерной игре есть 15 локаций. Между некоторыми парами локаций расположены порталы, причём каждый портал обслуживается одной из трёх гильдий: красной, синей или зелёной. Известно, что если любая одна гильдия внезапно отключит все свои порталы, то игрок всё равно сможет добраться из любой локации в любую другую, используя порталы двух оставшихся гильдий, возможно с пересадками. Какое минимальное число порталов может быть в игре?

Решение.

Пусть всего m порталов, а у гильдий m_1, m_2, m_3 порталов соответственно. Отождествим локации с вершинами графа, а порталы с его рёбрами. Тогда если отключится первая гильдия, то останется граф на 15 вершинах с $m - m_1$ рёбрами, и он должен быть связным. Связный граф на 15 вершинах имеет минимум $15 - 1 = 14$ рёбер, а значит $m - m_1 \geq 14$. Аналогичным образом, $m - m_2 \geq 14$, $m - m_3 \geq 14$. Сложим три данных неравенства:

$$\left(m - m_1\right) + \left(m - m_2\right) + \left(m - m_3\right) \geq 42$$

Левая часть преобразуется следующим образом: $3m - \left(m_1 + m_2 + m_3\right) = 3m - m = 2m$. Отсюда $2m \geq 42$, $m \geq 21$. То есть меньше 21 портала быть не может.

Покажем теперь, что 21 портала достаточно. Пронумеруем локации 1, 2, ..., 15. Красные порталы: (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10), (11, 12), (13, 14), синие: (2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9), (10, 11), (12, 13), (14, 15), зелёные: (1, 4), (3, 6), (5, 8), (7, 10), (9, 12), (11, 14), (13, 15). Легко видеть, что любые две гильдии дают путь через все вершины.

Ответ: 21.

9. На столе лежат 10 карточек с числами от 1 до 10. Их выстроили в ряд в случайном порядке. Назовём конфликтом пару карточек (x, y) (не обязательно соседних), если карточка с большим числом стоит левее карточки с меньшим. Карточки выложили в ряд произвольным образом. Какое число конфликтов может быть? В ответ запишите сумму всех возможных значений количества конфликтов.

Решение.

Минимум числа конфликтов равен нулю, ведь если карточки расположены по возрастанию, то ни одной конфликтной пары нет. Если же карточки стоят по убыванию, то каждая пара карточек образует конфликт. Тогда число конфликтов равно $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$. Также заметим, что если поменять местами две соседние карточки, то все остальные карточки сохраняют относительный порядок и меняется порядок только данной пары. Значит число конфликтов изменится на $+1$ или -1. Начнём с возрастающего ряда и будем увеличивать количество конфликтов. Будем протаскивать карточку 10 влево, меняя её местами с соседом слева, каждый такой обмен добавляет один конфликт. Так мы получим количество конфликтов от 0 до 9. Затем аналогично протаскиваем 9 и так далее, пока не построим расположение карточек в убывающем порядке. Тогда ответ:

$$1 + 2 + \ldots + 45 = \frac{45\cdot 46}{2} = 1035$$

Ответ: 1035.

10. В тренировочном центре спортсмен измерял нагрузку 11 дней подряд. Оказалось, что суммарная нагрузка за эти 11 дней является полным квадратом, а также представляется в виде суммы квадратов 11 последовательных натуральных чисел. Найдите минимально возможные 11 последовательных чисел, для которых выполнено данное условие. В качестве ответа запишите минимальное из этих чисел.

Решение.

Пусть эти 11 последовательных чисел имеют вид: $a - 5,\ a - 4,\ \ldots,\ a - 1,\ a,\ a + 1,\ \ldots,\ a + 4,\ a + 5$. Тогда сумма их квадратов равна $S = (a-5)^2 + (a-4)^2 + \ldots + (a+5)^2$. Заметим, что при раскрытии скобок вида $(a-k)^2$ и $(a+k)^2$ у нас удвоенное произведение будет получаться разных знаков, а значит оно будет взаимноуничтожаться. Тогда сумма S равна:

$$S = 11a^2 + 2\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) = 11a^2 + 110 = 11(a^2 + 10)$$

Так как S является также полным квадратом, то получаем, что $11\left(a^2 + 10\right) = M^2$, но тогда M^2 делится на 11, а так как 11 – простое число, то $M\vdots 11$. Отсюда запишем следующим образом:

$$11\left(a^2 + 10\right) = (11b)^2 = 121b^2$$

$$a^2 + 10 = 11b^2$$

Заметим, что так как правая часть делится на 11, то и левая часть должна делиться на 11, а значит a^2 должно иметь остаток 1 при делении на 11. Следовательно, $a^2 = 11l + 1$, то есть $(a - 1)(a + 1) = 11l$, а значит a имеет либо остаток 1, либо остаток 10 при делении на 11. Попробуем $a = 10$, $a = 12$, $a = 21$, они не подходят, а $a = 23$ – подходит: $23^2 + 10 = 11 \cdot 7^2$. $18^2 + \ldots 28^2 = 77^2$.

Ответ: 18.

11. В музее на каждом экспонате стоит трёхзначный инвентарный код N. Для контроля заведующий вычисляет контрольное число – сумму цифр этого кода. Оказалось, что для одного экспоната контрольное число получилось ровно в 11 раз меньше самого кода. Найдите все возможные такие трёхзначные коды N.

Решение.

Пусть $N = 100a + 10b + c$, обозначим за $S = a + b + c$ – сумма цифр числа N. По условию: $a + b + c = \frac{100a+10b+c}{11}$, откуда: $11 \cdot (a + b + c) = 100a + 10b + c$, то есть $89a - b - 10c = 0$ или $b + 10c = 89a$. В силу того, что b и c – цифры, имеем $b + 10c \leq 9 + 10 \cdot 9 = 99$, значит $89a \leq 99$, следовательно $a \leq 1$, а так как a не может быть равно нулю, то $a = 1$. Откуда $b + 10c = 89$, перепишем равенство следующим образом: $b = 89 - 10c$, чтобы b оказалось цифрой должно быть выполнено $0 \leq 89 - 10c \leq 9$, откуда $8 \leq c \leq 8$, то есть $c = 8$. Тогда $b = 89 - 80 = 9$, откуда $N = 198$.

Ответ: 198.

12. На фабрике за смену выпустили N деталей двух типов: тип X и тип Y. Известно, что деталей типа X оказалось 40% от общего выпуска, а среди деталей типа X доля деталей с маркировкой «A» составил 34%. а) Найдите наименьшее возможное N.
После контроля качества часть деталей типа X была забракована и утилизирована. При этом доля деталей с маркировкой «A» среди оставшихся деталей типа X стала равна 33%. б) Найдите наименьше возможное N в этом случае. Ответы на вопросы запишите через запятую без пробелов, сначала для пункта а), затем для пункта б).

Решение.

а) Обозначим за X – число деталей типа X, а за A – число деталей типа X с маркировкой «A», тогда:

$$X = \frac{40}{100}N = \frac{2}{5}N$$

$$A = \frac{34}{100}X = \frac{17}{50}X$$

Подставим выраженное значение X во второе выражение:

$$A = \frac{17}{50} \cdot \frac{2}{5}N = \frac{17}{125}N$$

Чтобы A было целым, нужно, чтобы N делилось на 125, то есть минимальное значение равно 125.

б) Пусть после брака осталось X' деталей типа X и A' маркировки «A». Тогда:

$$\frac{A^{'}}{X'} = \frac{33}{100}$$

$$A^{'} = \frac{33}{100}X'$$

Значит, X' кратно 100. Переберём минимальные значения N, кратные 125. Пусть $N = 125$, тогда $X = \frac{2}{5}\cdot 125 = 50$, но $X^{'} < X$ и в то же время $X⋮100$, что невозможно. Пусть $N = 250$, тогда $X = 100$, тоже не подходит. Пусть $N = 375$, тогда $X = \frac{2}{5}\cdot 375 = 150$, $A = \frac{34}{100}\cdot 150 = 51$, тогда $X^{'} = 100$, а $A^{'} = \frac{33}{100}\cdot 100 = 33$. То есть можно утилизировать 50 деталей типа X, из них 18 с маркировкой «A». Значит минимально подходит $N = 375$.

Ответ: $125, 375$.

13. В кружке робототехники есть 10 железных роботов и 10 пластиковых роботов. Руководитель хочет собрать команду роботов для турнира так, чтобы в команде было поровну железных и пластиковых роботов. Сколькими способами можно выбрать такую команду (В команде должно быть хотя бы два робота)?

Решение.

Рассмотрим произвольную команду с k железными и k пластиковыми роботами. Построим взаимно-однозначное соответствие: поставим такой команде в соответствие множество из 10 роботов, составленное так: мы берём всех пластиковых роботов, которые вошли в команду – их всего k, к ним добавляем всех железных роботов, которые в команду не попали, их всего $(10 - k)$. Таким образом получили множество из $k + (10 - k) = 10$ роботов. Такое соответствие действительно является взаимно-однозначным, потому что по полученному множеству мы можем восстановить команду. А число способов составить такое множество равно числу способов выбрать 10 элементов из 20 без учёта порядка, что можно посчитать как $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!} = 184756$. Но данное количество также учитывает команду, в которой всего 0 роботов, что не подходит по условию задачи, таким образом итоговый ответ: 184755.

Ответ: 184755.

14. В треугольнике ABC. Провели биссектрису AD, длина которой равна 5. Также известно, что угол $\angle B = 20^{\circ}$, $\angle C = 40^{\circ}$. Найдите модуль разности длин сторон BC и AB.

Решение.

Так как $\angle B = 20^{\circ}$, $\angle C = 40^{\circ}$, то $\angle BAC = 180^{\circ} - 20^{\circ} - 40^{\circ} = 120^{\circ}$, откуда $\angle BAD = \angle CAD = 60^{\circ}$. Значит, $\angle CDA = \angle BAD + \angle ABD = 80^{\circ}$ по свойству внешнего угла. Отметим на стороне BC точку A' такую, что $A^{'}B = AB$ ($A^{'}$ обязательно лежит внутри BC, так как BC – сторона напротив тупого угла), тогда разность длин BC и AB равна длине отрезка CA'. Треугольник $AA'B$ – равнобедренный по построению, а так как угол $\angle B = 20^{\circ}$, то углы при основании равны $\angle A^{'}AB = \angle AA^{'}B = 80^{\circ}$. Тогда

$\angle AA'D = \angle CDA = 80^{\circ}$, то есть треугольник $A'AD$ – равнобедренный, в котором $AA' = AD$. Далее, $\angle CAA' = \angle CAB - \angle A'AB = 120^{\circ} - 80^{\circ} = 40^{\circ}$, следовательно треугольник $CA'A$ тоже является равнобедренным, откуда $CA' = AA' = AD = 5$. Таким образом, $BC - AB = BC - A'B = CA' = 5$.

Ответ: 5.

15. На собрании математического кружка присутствует преподаватель и несколько учеников. Известно, что возраст преподавателя на 24 года больше, чем средний возраст всех учеников, а также на 20 лет больше, чем средний возраст всех присутствующих включая его. Сколько всего людей было на собрании?

Решение.

Обозначим за n число учеников, s – средний возраст учеников, а T – возраст преподавателя, m – средний возраст всех присутствующих. По условию: $T = s + 24$, $T = m + 20$, следовательно $m = T - 20$. Так как сумма возрастов всех учеников равна ns, то можно записать $m = \frac{ns+T}{n+1} = \frac{ns+(s+24)}{n+1} = \frac{(n+1)s+24}{n+1} = s + \frac{24}{n+1}$. С другой стороны, $m = T - 20 = (s + 24) - 20 = s + 4$, а значит:

$$s + \frac{24}{n+1} = s + 4$$

Откуда, $\frac{24}{n+1} = 4$, $n + 1 = 6$. А значит всего на собрании было 6 человек.

Ответ: 6.

16. Вася придумал последовательность $\{b_n\}$, члены которой начиная с четвёртого удовлетворяют соотношению $b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$. Также известно, что $b_1 = b_3 = 2$, $b_2 = 1$. Найдите степень вхождения двойки в разложение на простые множители числа b_{2026}.

Решение.

Заметим, что начальные значения являются степенями двойки: $b_1 = b_3 = 2^1$, $b_2 = 1 = 2^0$. Из заданного рекуррентного соотношения можно увидеть, что если три подряд идущих члена являются степенями двойки, то и все последующие тоже будут степенями двойки. А значит для всех n b_n является двойкой в некоторой степени. Обозначим $b_n = 2^{e_k}$, подставим в соотношение из условия:

$$2^{e_n} \cdot \left(2^{e_{n-2}}\right)^3 = 2^{e_{n-3}} \cdot \left(2^{e_{n-1}}\right)^3$$

Откуда:

$$2^{e_n + 3e_{n-2}} = 2^{e_{n-3} + 3e_{n-1}}$$

Следовательно,

$$e_n + 3e_{n-2} = e_{n-3} + 3e_{n-1}$$

То есть:

$$e_n = e_{n-3} - 3e_{n-2} + 3e_{n-1}$$

Мы получили другую рекуррентную последовательность с начальными членами: $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = 1$. Проверяя некоторые следующие члены, можно увидеть: $e_1 = 1 = (-1)^2$, $e_2 = 0 = 0^2$, $e_3 = 1 = 1^2$, $e_4 = 4 = 2^2$, $e_5 = 9 = 3^2$, $e_6 = 16 = 4^2$. То есть, $e_n = (n-2)^2$. Покажем это по индукции. База индукции показана. Пусть, верно, для $n-1, n-2$ и $n-3$, тогда:

$$e_n = (n-5)^2 + 3(n-3)^2 - 3(n-4)^2$$

Раскрывая скобки:

$$e_n = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$$

Итак, $e_n = (n-2)^2$, тогда $b_{2026} = 2^{e_{2026}} = 2^{2024^2} = 2^{4096576}$

Ответ: 4096576.