Весенний турнир юных математиков 2026
Профессионалы
30 мая 2026
Решения

1. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$, а угол $\angle BAC$ равен $80°$. На стороне BC выбрали точки D и E так, что $BD = AB$ и $CE = AC$, причём точки на стороне BC расположены в порядке B, E, D, C. Через точку D провели прямую, параллельную AC, а через точку E – прямую, параллельную AB. Эти прямые пересеклись в точке K. Найдите угол $\angle DAK$.

Решение.

Так как $AB = AC$, треугольник ABC равнобедренный. Поэтому: $\angle ABC = \angle ACB = (180° - 80°) / 2 = 50°$. Рассмотрим треугольник ABD. Так как D лежит на BC, то:

$\angle ABD = \angle ABC = 50°$. По условию $BD = AB$, значит треугольник ABD равнобедренный. Его углы при основании AD равны: $\angle BAD = \angle ADB = (180° - 50°) / 2 = 65°$.

Аналогично в треугольнике ACE имеем $CE = AC$ и $\angle ACE = 50°$, поэтому: $\angle CAE = \angle AEC = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$. Так как $\angle BAC = 80°$, а лучи AD и AE лежат внутри угла $\angle BAC$, то угол между ними равен: $\angle DAE = 65° + 65° - 80° = 50°$.

Теперь заметим, что треугольник ABC симметричен относительно биссектрисы угла A. Условия $BD = AB$ и $CE = AC$ задают точки D и E симметрично относительно этой оси: точка D на правой части основания соответствует точке E на левой части основания.

Прямая через D, параллельная AC, при этой симметрии переходит в прямую через E, параллельную AB. Значит, их точка пересечения K лежит на оси симметрии треугольника ABC.

Следовательно, AK является осью симметрии и делит угол $\angle DAE$ пополам. Поэтому:

$\angle DAK = \angle DAE / 2 = 50° / 2 = 25°$.

Ответ: 25°**.**

2. Найдите все трёхзначные числа n, для которых выполнено равенство $n = 41 \cdot S(n) + 16$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n. В ответе запишите найденные числа в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Пусть $n = 100a + 10b + c$, где a – число сотен, b – число десятков, c – число единиц. Тогда $a \in \{1, ..., 9\}$, $b, c \in \{0, ..., 9\}$.

Из условия получаем $100a + 10b + c = 41(a + b + c) + 16$, то есть

$59a = 31b + 40c + 16$.

Правая часть должна делиться на 59. Переберём только цифру c. Получаем $31b = 59a - 40c - 16$, поэтому при каждом c значение b однозначно определяется остатком.

Проверка $c = 0, 1, ..., 9$ даёт допустимые тройки цифр: $(2, 2, 1)$, $(5, 9, 0)$, $(9, 5, 9)$.

Следовательно, подходят числа 221, 590, 959.

Ответ: 221, 590, 959

3. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, ..., 9$, в которых сумма любых двух соседних чисел не делится на 3?

Решение.

Рассмотрим только остатки чисел при делении на 3. Остатков 0, 1, 2 среди чисел $1, ..., 9$ поровну: по три числа каждого типа.

Запрещённые соседства по остаткам: 0 рядом с 0, 1 перед 2 или 2 перед 1, так как именно в этих случаях сумма соседних чисел делится на 3.

Пусть $F(a, b, c; t)$ – число способов дописать последовательность, если осталось a чисел остатка 0, b чисел остатка 1, c чисел остатка 2, а последний записанный остаток равен t. Тогда переходим только к тем остаткам, которые не образуют запрещённую пару с t.

По этой рекурсии получаем: если первый остаток 0, остаётся 14 вариантов последовательностей остатков; если первый остаток 1 – 22 варианта; если первый остаток 2 – также 22 варианта. Всего 58 последовательностей остатков.

В каждой такой последовательности остатки 0 можно заменить конкретными числами 3, 6, 9 шестью способами; остатки 1 – числами 1, 4, 7 шестью способами; остатки 2 – числами 2, 5, 8 шестью способами.

Итого 58·6·6·6 = 12528 перестановок.

Ответ: 12528

4. В системе связи 10 узлов. Нужно проложить как можно меньше кабелей так, чтобы после выхода из строя любых двух узлов оставшаяся система всё равно была связной. Какое минимальное число кабелей необходимо?

Решение.

Если после удаления любых двух узлов сеть остаётся связной, то из каждого узла должно выходить хотя бы 3 кабеля. Иначе, если степень некоторого узла не больше 2, можно удалить всех его соседей, и этот узел окажется изолированным.

Значит, сумма степеней всех 10 узлов не меньше 30. По лемме о рукопожатиях число кабелей не меньше $\frac{30}{2} = 15$.

Покажем, что 15 кабелей достаточно. Возьмём две пятиугольные цепи, замкнутые в циклы: $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ и $B_1B_2B_3B_4B_5B_1$, а также соединим A_i с B_i для каждого i.

Получается следующий граф: у каждой вершины степень 3, всего 15 рёбер. После удаления любых двух вершин хотя бы один путь по верхнему или нижнему пятиугольнику и вертикальные связи позволяют соединить все оставшиеся вершины; разрывы на циклах обходятся через второй цикл.

Следовательно, нижняя оценка достижима.

Ответ: 15

5. Из чисел $1, 2, ..., 18$ выбирают четыре различных числа $a < b < c < d$. Сколько существует выборов, для которых $a + d = b + c$?

Решение.

Условие $a + d = b +$с означает, что внешняя пара (a, d) и внутренняя пара (b, c) имеют одну и ту же сумму.

Для каждой суммы s посчитаем количество пар (x, y), где $1 \leq x < y \leq 18$ и $x + y = s$. Если таких пар m_s, то выбрать две пары с этой суммой можно $C^2_{m_s}$ способами.

Количество пар по суммам от 3 до 35 равно: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1.

Поэтому искомое число равно сумме $C(m_s, 2)$ по всем суммам s. Получаем 372.

Каждый такой выбор четырёх чисел учитывается ровно один раз, потому что равные суммы задают именно разбиение на внешнюю и внутреннюю пары.

Ответ: 372

6. Найдите все натуральные n, для которых число $7n + 5$ делит число $3n + 127$. В ответ укажите все возможные значения n в порядке возрастания без пробелов.

Решение.

Если $7n + 5$ делит $3n + 127$, то оно делит любую целую линейную комбинацию этих чисел.

Рассмотрим $7(3n + 127) - 3(7n + 5) = 21n + 889 - 21n - 15 = 874$.

Значит, $7n + 5$ – положительный делитель числа 874. Разложение: $874 = 2·19·23$.

Кроме того, $7n + 5$ должно быть больше 12 и давать остаток 5 при делении на 7. Среди делителей 874 этому условию подходит только 19.

Получаем $7n + 5 = 19$, откуда $n = 2$.

Ответ: 2

7. Код состоит из шести цифр от 0 до 9. Назовём его сбалансированным, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Сколько существует сбалансированных кодов, отличных от 000000?

Решение.

Посчитаем, сколько троек цифр имеют каждую возможную сумму от 0 до 27. Эти количества являются коэффициентами многочлена $(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^3$.

Получаем последовательность: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 63, 69, 73, 75, 75, 73, 69, 63, 55, 45, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1 .

Чтобы шестизначный код был сбалансированным, левая и правая тройки должны иметь одну и ту же сумму. Поэтому всего количество кодов должно быть равно сумме квадратов этих чисел.

Эта сумма равна 55252. Код 000000 надо исключить.

Следовательно, остаётся 55251 код.

Ответ: 55251

8. Сколько существует слов длины 13, состоящих из 8 букв А и 5 букв Б, в которых нигде не встречаются три буквы Б подряд?

Решение.

Сначала расставим 8 букв А. Они образуют 9 промежутков: перед первой А, между соседними А и после последней А.

Чтобы не было трёх букв Б подряд, в каждый промежуток можно поставить не более двух букв Б.

Нужно распределить 5 одинаковых букв Б по 9 промежуткам, причём в каждом промежутке не больше 2 букв. Без ограничения сверху это можно сделать $C_{13}^{8} = 1287$ способами.

Вычтем плохие распределения, где в некотором промежутке стоит хотя бы 3 буквы Б. Выберем такой промежуток 9 способами, положим туда 3 буквы Б, оставшиеся 2 буквы распределим по 9 промежуткам: $C_{10}^{8} = 45$ способов.

Два промежутка одновременно не могут содержать по 3 буквы Б, потому что всего букв Б только 5. Значит, ответ $1287 - 9 \cdot 45 = 882$.

Ответ: 882

9. Из чисел 1, 2, ..., 40 нужно выбрать как можно больше чисел так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались на 10 и никакие два выбранных числа не давали в сумме 41. Сколько чисел можно выбрать?

Решение.

Построим граф: числа – вершины, а запрещённые пары соединены ребром. Нужно найти максимальное независимое множество.

Числа распадаются на пять независимых друг от друга восьмёрок: $\{1, 10, 11, 20, 21, 30, 31, 40\}$, $\{2, 9, 12, 19, 22, 29, 32, 39\}$, ..., $\{5, 6, 15, 16, 25, 26, 35, 36\}$.

В каждой такой восьмёрке запрещённые связи образуют цикл длины 8. Например, в первой восьмёрке: 1 связано с 11 и 40, 11 – с 1 и 21, 21 – с 11 и 20, и так далее.

В цикле длины 8 нельзя выбрать больше 4 вершин без соседних. Значит, всего нельзя выбрать больше $5 \cdot 4 = 20$ чисел.

Достижимость: в каждой восьмёрке берём через одну вершину цикла. Например, можно выбрать по 4 числа из каждой восьмёрки. Поэтому максимум равен 20.

Ответ: 20

10. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$, а угол $\angle BAC$ равен $20°$. На стороне AB выбрали точку D, а на стороне AC выбрали точку E так, что $CD = AD$ и $BE = AE$. Прямые CD и BE пересекаются в точке P. Найдите угол $\angle BPC$.

Решение.

Так как AB = AC, треугольник ABC равнобедренный. Поэтому углы при основании равны: $\angle ABC = \angle BCA = (180° - 20°) / 2 = 80°$. Рассмотрим треугольник ACD. Так как точка D лежит на стороне AB, то угол $\angle CAD$ совпадает с углом $\angle CAB$, то есть: $\angle CAD = 20°$.

По условию $CD = AD$, значит треугольник ACD равнобедренный с основанием AC. Следовательно: $\angle ACD = \angle CAD = 20°$, тогда угол между прямыми CD и CB равен: $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 80° - 20° = 60°$.

Аналогично рассмотрим треугольник ABE. Так как точка E лежит на стороне AC, то: $\angle BAE = 20°$. По условию $BE = AE$, значит треугольник ABE равнобедренный с основанием AB. Поэтому: $\angle ABE = \angle BAE = 20°$. Значит: $\angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 80° - 20° = 60°$. Получили, что прямая CD образует с CB угол $60°$, а прямая BE образует с BC угол $60°$. Поэтому в треугольнике BPC углы при B и C равны по $60°$:

$\angle PBC = 60°$, $\angle BCP = 60°$. Следовательно: $\angle BPC = 180° - 60° - 60° = 60°$.

Ответ: 60°**.**

11. Сколько натуральных делителей числа $N = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2$ являются кратными 180, но не являются кратными 2520?

Решение.

Запишем делитель в виде $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, где $0 \le a \le 6$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 4$, $0 \le d \le 2$.

Кратность $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ означает: $a \ge 2$, $b \ge 2$, $c \ge 1$. Тогда a можно выбрать 5 способами, b – 4 способами, c – 4 способами, d – 3 способами. Всего $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ делителей.

Теперь вычтем те из них, которые кратны $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Для них дополнительно $a \ge 3$ и $d \ge 1$.

Таких делителей $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128$.

Следовательно, искомое количество равно $240 - 128 = 112$.

Ответ: 112

12. Числа 1, 2, ..., 11 нужно разбить на две группы с одинаковой суммой. Сколько существует таких разбиений, если порядок групп не важен?

Решение.

Сумма всех чисел от 1 до 11 равна 66, значит сумма каждой группы должна быть 33.

Посчитаем количество подмножеств чисел 1, ..., 11 с суммой 33. Введём $d_k(s)$ – число способов получить сумму s, используя только числа 1, ..., k.

Рекуррентно $d_k(s) = d_{k-1}(s) + d_{k-1}(s - k)$: мы либо не берём число k, либо берём его.

Последовательное заполнение таблицы даёт $d_8(33) = 2$, $d_9(33) = 12$, $d_{10}(33) = 35$, $d_{11}(33) = 70$.

Каждое разбиение на две группы посчитано дважды: сначала можно выбрать первую группу, а можно выбрать вторую. Поэтому ответ равен $\frac{70}{2} = 35$.

Ответ: 35

13. Сколько существует последовательностей из 12 нулей и единиц, в которых ровно пять единиц и нигде не встречаются три нуля подряд?

Решение.

Поставим сначала пять единиц. Они образуют шесть промежутков для нулей: до первой единицы, между соседними единицами и после последней единицы.

Всего нужно распределить семь нулей по шести промежуткам, причём в каждом промежутке не больше двух нулей.

Без ограничения сверху число распределений равно $C_{12}^{5} = 792$.

Вычтем распределения, где в некотором промежутке хотя бы три нуля. Выбираем такой промежуток 6 способами, убираем из него 3 нуля, оставшиеся 4 нуля распределяем по 6 промежуткам: $C_{9}^{5} = 126$ способов.

Если два промежутка имеют хотя бы по три нуля, то после удаления по три нуля остаётся 1 ноль, который можно распределить $C_{6}^{5} = 6$ способами; пар промежутков $C_{6}^{2} = 15$.

По включениям-исключениям получаем $792 - 6 \cdot 126 + 15 \cdot 6 = 126$.

Ответ: 126

14. Найдите наименьшее целое $n > 1000$, для которого число $2^{n} + 3^{n}$ делится на 13.

Решение.

Работаем по модулю 13. Так как 2 обратимо по модулю 13, разделим выражение на 2^{n}. Нужно, чтобы $1 + (3 \cdot 2^{-1})^{n} \equiv 0\ (mod\ 13)$.

Обратное к 2 по модулю 13 равно 7, поэтому $3 \cdot 2^{-1} \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 8\ (mod\ 13)$. Нужно $8^{n} \equiv -1 \equiv 12\ (mod\ 13)$.

Считаем степени 8 по модулю 13: $8^1 \equiv 8$, $8^2 \equiv 64 \equiv 12$. Значит, уже при $n = 2$ получается -1.

Поскольку $8^4 \equiv 1$, условие выполняется ровно при $n \equiv 2\ (mod\ 4)$.

Наименьшее $n > 1000$ с таким остатком – 1002.

Ответ: 1002

15. На складе лежат коробки трёх видов: A, B и C. Всего коробок меньше 200. Известно, что коробок A ровно $\frac{2}{7}$ от общего числа, а коробок B ровно $\frac{3}{5}$ от числа коробок, не являющихся A. После того как 21 коробку C увезли, коробок B стало ровно $\frac{4}{7}$ от оставшегося числа коробок. Сколько коробок было на складе сначала?

Решение.

Пусть всего было N коробок. Тогда $A = \frac{2N}{7}$, значит N кратно 7.

Не A составляет $\frac{5N}{7}$. Коробок B равно $\frac{3}{5}$ от этого числа, то есть $B = \frac{3N}{7}$.

Тогда $C = N - \frac{2N}{7} - \frac{3N}{7} = \frac{2N}{7}$.

После вывоза 21 коробки C всего осталось $N - 21$ коробка, а число коробок B не изменилось и равно $\frac{3N}{7}$.

По условию $\frac{3N}{7} = \frac{4(N-21)}{7}$. Умножаем на 7: $3N = 4N - 84$, откуда $N = 84$.

Проверка: $A = 24$, $B = 36$, $C = 24$. После вывоза 21 коробки C остаётся 63 коробки, и $B = 36$ действительно составляет $\frac{4}{7}$ от 63.

Ответ: 84

16. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, а при $n \geq 3$ выполняется $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Сколько среди первых 2026 членов последовательности делятся на 5?

Решение.

Достаточно рассмотреть последовательность по модулю 5. Запишем пары соседних остатков: $(1, 2)$.

Далее получаем остатки: $1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 4,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1,\ 0$, после чего снова идут $1,\ 2,\ 0,\ 2,\ ...$

Период по модулю 5 равен 12. В каждом периоде нулевые остатки стоят на 3-м, 6-м, 9-м и 12-м местах, то есть их 4.

Так как $2026 = 12 \cdot 168 + 10$, в первых 2016 членах будет $168 \cdot 4 = 672$ членов, делящихся на 5.

В оставшихся 10 членах следующего периода нули стоят на 3-м, 6-м и 9-м местах, то есть добавляется ещё 3 члена.

Итого $672 + 3 = 675$.

Ответ: 675