Летний математический турнир АПО, профессионалы
22 августа 2026
Решения

1. Вычислите значение выражения $2026 \cdot 2024 - 2025^2$.

Решение.

Можно просто посчитать: $2026 \cdot 2024 = 4100624$, а $2025 \cdot 2025 = 4100625$. Разность равна -1.

Полезно увидеть и причину. Возьмём любое число и его соседей: произведение соседей всегда на единицу меньше квадрата самого числа. Действительно, $2026 \cdot 2024 = (2025 + 1) \cdot (2025 - 1)$: если у прямоугольника 2025×2025 одну сторону увеличить на 1, а другую уменьшить на 1, площадь уменьшится ровно на одну клетку.

Ответ: −1.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 45 и в десятичной записи которого встречаются только цифры 0 и 1.

Решение.

Число делится на 5, поэтому оканчивается на 0 или 5. Пятёрок в записи нет, значит, последняя цифра – 0.

Число делится на 9, поэтому сумма его цифр кратна 9. Все цифры – нули и единицы, значит, единиц не меньше девяти.

Наименьшее число, в котором девять единиц и есть завершающий ноль, – это 1111111110. Оно действительно делится на 45: сумма цифр равна 9, а оканчивается число нулём.

Ответ: 1111111110.

3. Найдите остаток от деления числа $2^{2026} + 3^{2026}$ на 7.

Решение.

Остатки степеней двойки при делении на 7 повторяются с периодом 3: 2, 4, 1, 2, 4, 1, … Так как $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, число 2^{2026} даёт тот же остаток, что и 2^1, то есть 2.

Остатки степеней тройки при делении на 7 повторяются с периодом 6: 3, 2, 6, 4, 5, 1, … Так как $2026 = 6 \cdot 337 + 4$, число 3^{2026} даёт тот же остаток, что и $3^4 = 81$, то есть 4.

Остаток суммы равен остатку числа $2 + 4 = 6$, то есть 6.

Ответ: 6.

4. В треугольнике ABC угол B втрое больше угла A, а угол C впятеро больше угла A. Биссектриса угла B (то есть луч, делящий этот угол на два равных угла) пересекает сторону AC в точке L. Найдите угол BLC в градусах (одним числом без единиц измерения).

Решение.

Из условия $\angle A + 3\angle A + 5\angle A = 180°$, поэтому $\angle A = 20°$, $\angle B = 60°$ и $\angle C = 100°$.

Биссектриса делит угол B пополам, значит, $\angle ABL = 30°$.

Угол BLC – внешний угол треугольника ABL при вершине L, поэтому он равен сумме двух несмежных с ним углов: $\angle BLC = \angle A + \angle ABL = 20° + 30° = 50°$.

Ответ: 50.

5. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 7 дают остаток 3, а при делении на 5 – остаток 2.

Решение.

Число 17 даёт остаток 3 при делении на 7 и остаток 2 при делении на 5. Прибавление 35 не меняет ни один из остатков, а других чисел с такими остатками в промежутке длины 35 нет. Значит, подходят в точности числа вида $35k + 17$.

Наименьшее трёхзначное такое число получается при $k = 3$: это 122. Наибольшее – при $k = 28$: это 997. Всего таких чисел $28 - 3 + 1 = 26$.

Числа идут с постоянным шагом, поэтому разобьём их на 13 пар: первое с последним, второе с предпоследним и так далее. Сумма в каждой паре одна и та же и равна $122 + 997 = 1119$, поэтому общая сумма равна $1119 \cdot 13 = 14547$.

Ответ: 14547.

6. Периметр прямоугольника равен 36 см, а его площадь – 80 см². Найдите большую сторону прямоугольника в сантиметрах (одним числом без единиц измерения).

Решение.

Полупериметр равен $36 : 2 = 18$ см – это сумма двух соседних сторон.

Переберём пары чисел, дающих в сумме 18, и посчитаем их произведения: 1 и 17 дают 17, 2 и 16 – 32, 3 и 15 – 45, 4 и 14 – 56, 5 и 13 – 65, 6 и 12 – 72, 7 и 11 – 77, 8 и 10 – 80, 9 и 9 – 81.

Произведение 80 получается только у пары 8 и 10. Заметим, что перебор ничего не пропустил: чем дальше пара от середины, тем меньше произведение, поэтому каждое значение площади встречается не больше одного раза.

Большая сторона равна 10 см.

Ответ: 10.

7. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 12 различных натуральных делителей и которое при этом не делится на 4.

Решение.

Если число разложено на простые множители как $p^a \cdot q^b \cdot \ldots$, то делителей у него $(a + 1)(b + 1)\ldots$ – каждый делитель получается независимым выбором показателей.

Число не делится на 4, поэтому двойка входит в разложение не больше чем в первой степени. Разберём два случая.

Число чётное: тогда оно равно $2 \cdot m$ с нечётным m, и делителей у него ровно вдвое больше, чем у m. Значит, у m должно быть 6 делителей. Наименьшее нечётное число с шестью делителями – это $3^2 \cdot 5 = 45$ (годится и $3^5 = 243$, но оно больше). Получаем число $2 \cdot 45 = 90$.

Число нечётное: тогда у него самого 12 делителей, и наименьшее такое нечётное число – $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$.

Из 90 и 315 меньшее – 90. Проверка: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, делителей $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, и на 4 число 90 не делится.

Ответ: 90.

8. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 выбрали несколько так, что сумма никаких двух выбранных чисел не делится на 7. Какое наибольшее количество чисел могло быть выбрано?

Решение.

Разобьём числа на классы по остатку от деления на 7. Остатки 1 и 2 встречаются по 15 раз (например, 1, 8, …, 99), а остальные пять остатков – по 14 раз.

Сумма двух чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда сумма их остатков равна 7 или оба остатка равны 0. Поэтому из каждой пары классов с остатками $(1; 6)$, $(2; 5)$, $(3; 4)$ можно брать числа только из одного класса, а из класса с остатком 0 – не более одного числа.

Из пары $(1; 6)$ можно взять не более 15 чисел, из пары $(2; 5)$ – тоже не более 15, а из пары $(3; 4)$ – не более 14. Значит, всего выбрано не больше $15 + 15 + 14 + 1 = 45$ чисел.

Пример на 45 чисел: возьмём все числа с остатками 1, 2 и 3, а также одно число, кратное 7. Суммы остатков здесь равны 1, 2, 3, 4, 5 или 6 и ни разу не кратны 7.

Ответ: 45.

9. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором каждое из трёх чисел n, $n + 1$ и $n + 2$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего единицы.

Решение.

Число делится на квадрат, больший единицы, ровно тогда, когда оно делится на 4, или на 9, или на 25, или на 49, и так далее.

Выпишем по порядку все такие числа, не превосходящие 50: 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, 40, 44, 45, 48, 49, 50.

Ищем в этом списке три подряд идущих натуральных числа. Пары соседей встречаются несколько раз (8 и 9, 24 и 25, 27 и 28, 44 и 45), но каждый раз следующее за ними число свободно от квадратов: $10 = 2 \cdot 5$, $26 = 2 \cdot 13$, 29 – простое, $46 = 2 \cdot 23$.

Первая тройка подряд идущих чисел – это 48, 49, 50: действительно, $48 = 4^2 \cdot 3$, $49 = 7^2$, $50 = 5^2 \cdot 2$.

Ответ: 48.

10. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел $(a; b)$, для которых $\text{НОД}(a; b) = 6$, а $\text{НОК}(a; b) = 13860$?

Решение.

Наибольший общий делитель равен 6, поэтому оба числа кратны 6: запишем $a = 6x$ и $b = 6y$. При этом у чисел x и y общих делителей, кроме единицы, нет – иначе НОД чисел a и b был бы больше 6.

Для взаимно простых x и y наименьшее общее кратное чисел a и b равно $6xy$. Значит, $6xy = 13860$, откуда $xy = 2310$.

Разложим: $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Каждый из пяти простых множителей должен целиком уйти либо в x, либо в y: если бы он попал в оба, у x и y появился бы общий делитель.

Значит, вариантов $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, и все они дают разные пары. Упорядоченных пар ровно 32.

Ответ: 32.

11. Клетки полоски 1×10 раскрашивают в три цвета так, что никакие две соседние клетки не окрашены одинаково и, кроме того, первая и последняя клетки полоски тоже окрашены по-разному. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Обозначим через C_n число нужных раскрасок полоски из n клеток.

Сначала посчитаем раскраски, в которых различаются только соседние клетки: первую клетку можно окрасить 3 способами, а каждую следующую – 2 способами, всего $3 \cdot 2^{n-1}$ раскрасок.

Такие раскраски бывают двух видов. У одних концы окрашены по-разному – их ровно C_n. У других концы одного цвета; склеив совпадающие концевые клетки в одну, получим раскраску полоски из $n-1$ клетки, у которой соседние клетки различны и концы различны, то есть одну из C_{n-1} раскрасок. Это соответствие обратимо.

Значит, $C_n + C_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$. Так как $C_2 = 3 \cdot 2 = 6$, последовательно получаем: $C_3 = 6$, $C_4 = 24 - 6 = 18$, $C_5 = 48 - 18 = 30$, $C_6 = 96 - 30 = 66$, $C_7 = 192 - 66 = 126$, $C_8 = 384 - 126 = 258$, $C_9 = 768 - 258 = 510$ и, наконец, $C_{10} = 1536 - 510 = 1026$.

Ответ: 1026.

12. Квадрат разрезали на четыре одинаковых прямоугольника. Периметр каждого из них равен 30 см. Какой может быть площадь квадрата в квадратных сантиметрах? Если значений несколько, укажите их все через запятую, без единиц измерения.

Решение.

Сложить квадрат из четырёх одинаковых прямоугольников можно двумя способами: поставить их в ряд полосами или сложить в две строки по две части.

Первый способ. Пусть сторона квадрата равна a. Тогда каждая полоса имеет размеры a и $\frac{a}{4}$, и её периметр равен $2a + \frac{a}{2}$. Из условия $2a + \frac{a}{2} = 30$ получаем $a = 12$, и площадь квадрата равна 144 см².

Второй способ. Каждая часть занимает половину стороны и по горизонтали, и по вертикали, то есть является квадратом со стороной $\frac{a}{2}$ – а квадрат тоже прямоугольник. Его периметр равен $4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$, из $2a = 30$ получаем $a = 15$ и площадь 225 см².

Других способов нет: если четыре одинаковых прямоугольника складываются в квадрат, то они либо идут полосами, либо стоят по два в два ряда. Поэтому ответов два.

Ответ: 144, 225.

13. Сколько существует натуральных чисел n, у которых произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ оканчивается ровно на 2027 нулей?

Решение.

Число нулей в конце произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ равно показателю, с которым пятёрка входит в его разложение на простые множители (двоек там заведомо больше). Этот показатель равен сумме $[\frac{n}{5}] + [\frac{n}{25}] + [\frac{n}{125}] + \ldots$, где квадратные скобки означают целую часть.

При $n = 8124$ получаем $1624 + 324 + 64 + 12 + 2 = 2026$ нулей.

Следующее число, 8125, делится на 5 сразу четыре раза, ведь $8125 = 5^4 \cdot 13$. Поэтому при $n = 8125$ количество нулей равно $1625 + 325 + 65 + 13 + 2 = 2030$.

С ростом n количество нулей не убывает, поэтому при $n \leq 8124$ нулей не больше 2026, а при $n \geq 8125$ – не меньше 2030. Значит, ровно 2027 нулей не бывает ни при каком n.

Ответ: 0.

14. В турнире по шашкам участвовали 12 человек, каждый сыграл с каждым ровно одну партию. За победу даётся 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0. Какое наибольшее число участников могло набрать больше 7 очков?

Решение.

Пусть больше 7 очков набрали m участников. Так как очки кратны 0,5, каждый из них набрал не меньше 7,5 очка, а все вместе – не меньше $7,5m$ очков.

Посчитаем, сколько очков они могли набрать. В партиях друг с другом они разыгрывают ровно $\frac{m(m-1)}{2}$ очков (по одному очку за партию), а в партиях с остальными участниками – не больше $m(12-m)$ очков.

Получаем неравенство $7,5m \leq \frac{m(m-1)}{2} + m(12-m)$. Разделив на m, приходим к $7,5 \leq \frac{m-1}{2} + 12 - m = 12 - \frac{m+1}{2}$, откуда $\frac{m+1}{2} \leq 4,5$ и $m \leq 8$.

Восемь участников возможно: пусть восемь сильнейших выиграли все партии у четырёх остальных – это даёт каждому по 4 очка, – а все 28 партий между собой свели вничью, получив ещё по 3,5 очка. Тогда у каждого из этих восьми ровно 7,5 очка, то есть больше семи.

Ответ: 8.

15. Какое наибольшее число клеток можно отметить в квадрате 6×6 так, чтобы никакие четыре отмеченные клетки не оказались вершинами прямоугольника со сторонами по линиям сетки?

Решение.

Оценка. Условие означает, что никакие две строки не могут иметь двух отмеченных клеток в одних и тех же столбцах: такие четыре клетки как раз и дали бы прямоугольник.

Посмотрим в каждой строке на все пары отмеченных клеток. Если в строке отмечено 2 клетки, пара одна; если 3 клетки – пар три; если 4 клетки – пар шесть. Каждая такая пара задаёт пару столбцов, и по условию все эти пары столбцов – по всем строкам вместе – должны быть разными. А всего пар столбцов в квадрате 6×6 ровно 15.

Пусть отмечено 17 клеток. Тогда в шести строках в сумме 17 клеток, и меньше всего пар получится при самом ровном распределении: пять строк по 3 клетки и одна строка с 2 клетками. Это даёт $5 \cdot 3 + 1 = 16$ пар столбцов – больше пятнадцати, чего быть не может. Значит, отмечено не больше 16 клеток.

Пример на 16 клеток. Отметим в первой строке столбцы 1, 2, 3; во второй – 1, 4, 5; в третьей – 2, 4, 6; в четвёртой – 3, 5, 6; в пятой – 1 и 6; в шестой – 2 и 5. Любые две строки имеют не больше одного общего столбца, поэтому прямоугольника нет, а всего отмечено $3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 16$ клеток.

Ответ: 16.

16. По прямоугольному полю 7×10 клеток (семь строк и десять столбцов) ездят четыре робота-сеялки. Все они стоят в левой верхней клетке. За один ход один из роботов переезжает на соседнюю клетку вправо или вниз. Через некоторое время все роботы собрались в правой нижней клетке. Найдите наименьшее возможное количество клеток, в которых не побывал ни один робот.

Решение.

Оценка. Назовём диагональю набор клеток, у которых сумма номеров строки и столбца одна и та же. Диагоналей ровно 16, а число клеток в них равно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 – всего 70, то есть все клетки поля.

При каждом ходе сумма номеров строки и столбца увеличивается ровно на единицу, поэтому маршрут одного робота содержит ровно по одной клетке каждой диагонали. Значит, четыре робота посетили не больше четырёх клеток каждой диагонали.

Поэтому посещённых клеток не больше $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 52$, а непосещённых – не меньше $70 - 52 = 18$.

Пример. Пусть первый робот проедет по всей первой строке, а затем вниз по десятому столбцу; второй – вниз по первому столбцу, а затем по всей седьмой строке; третий – вниз на одну клетку, по второй строке до девятого столбца, затем вниз и вправо в угол; четвёртый – вправо на одну клетку, вниз по второму столбцу до шестой строки, затем вправо по шестой строке и вниз.

Роботы побывают ровно в двух верхних и двух нижних рядах, а также на двух левых и двух правых грядках. Непосещённым останется прямоугольник 3×6 в середине поля, то есть ровно 18 клеток.

Ответ: 18.