Весенний турнир юных математиков 2026
Начинающие
30 мая 2026
Решения

1. На складе роботов ящик был подписан двузначным числом. Если поменять цифры этого числа местами, получится число на 36 меньше исходного. Кроме того, сумма цифр исходного числа равна 12. Какое число было написано на ящике?

Решение.

Пусть исходное число имеет вид $10a + b$, где a – цифра десятков, b – цифра единиц. После перестановки цифр получится число $10b + a$. По условию: $(10a + b) - (10b + a) = 36$. Отсюда $9a - 9b = 36$, значит $a - b = 4$. Также известно, что $a + b = 12$. Решая систему, получаем $a = 8$, $b = 4$. Значит, исходное число равно 84.

Ответ: 84.

2. Робот движется по линиям клетчатой сетки из левого нижнего угла прямоугольника 4×3 в правый верхний. За один шаг он может идти только вправо или вверх. Одна вершина сетки заблокирована: она находится на 2 шага правее и на 1 шаг выше начальной точки. Сколько существует маршрутов, которые не проходят через заблокированную вершину?

Решение.

Всего, чтобы дойти до правого верхнего угла, робот должен сделать 4 шага вправо и 3 шага вверх, всего 7 шагов. Число всех маршрутов равно числу способов выбрать, на каких 3 шагах идти вверх: $C_7^3 = 35$. Посчитаем маршруты, проходящие через заблокированную вершину. До неё нужно сделать 2 шага вправо и 1 шаг вверх, это можно сделать $C_3^1 = 3$ способами. От неё до конца остаётся 2 шага вправо и 2 шага вверх, это $C_4^2 = 6$ способов. Значит, через запретную вершину проходят $3 \cdot 6 = 18$ маршрутов. Тогда разрешённых маршрутов $35 - 18 = 17$.

Ответ: 17

3. В трёх коробках лежат 10, 14, и 22 камня. За один ход разрешается выбрать две коробки, вынуть из каждой по одному камню и положить эти два камня в третью коробку. Можно ли за несколько ходов получить 15, 15 и 16 камней в коробках соответственно? Если можно – в ответе укажите количество ходов, если нет, то запишите в ответ 0.

Решение.

Рассмотрим остатки чисел камней в коробках по модулю 3. Один ход имеет вид: две выбранные коробки уменьшаются на 1, а третья увеличивается на 2. Но увеличение на 2 по модулю 3 – это то же самое, что уменьшение на 1. Значит за один ход все три остатка одновременно уменьшаются на 1 по модулю 3.

Следовательно, разности остатков между коробками не меняются.
Изначально остатки равны $10 \equiv 1$, $14 \equiv 2$, $22 \equiv 1$ по модулю 3. То есть две коробки имеют одинаковый остаток, а одна другой. В состоянии 15, 15, 16 остатки равны 0, 0, 1. Здесь тоже две коробки имеют одинаковый остаток, но важно, что одинаковыми стали первые две коробки, тогда как изначально одинаковыми были первая и третья. Поскольку коробки фиксированы, такая перестановка остатков невозможна.
Значит получить 15, 15, 16 нельзя.

Ответ: 0.

4. Код сейфа состоит из четырёх цифр. Первая цифра не может быть нулём, все цифры кода различны, а сам код должен быть чётным. Сколько существует таких кодов?

Решение.

Код чётный, значит последняя цифра должна быть одной из $0, 2, 4, 6, 8$. Рассмотрим два случая.

1) Последняя цифра 0. Тогда первая цифра может быть любой из $1, ..., 9$: 9 вариантов. После выбора первой цифры остаётся 8 вариантов для второй и 7 для третьей. Получаем $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ кода.

2) Последняя цифра одна из $2, 4, 6, 8$: 4 варианта. Первая цифра не ноль и не равна последней, значит для неё 8 вариантов. Затем для второй цифры остаётся 8 вариантов, для третьей – 7. Получаем $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$ кода. Всего $504 + 1792 = 2296$.

Ответ: 2296**.**

5. На клетчатой доске 8×8 нужно закрасить несколько клеток так, чтобы: 1) закрашенная фигура была связной по сторонам, 2) она касалась всех четырёх сторон доски, 3) среди всех таких фигур в ней было бы как можно меньше клеток. Сколько клеток нужно закрасить? Какой наименьший периметр может быть у такой фигуры? Ответы на вопросы дайте последовательно без пробелов.

Решение.

Чтобы фигура касалась левой и правой сторон, нужно провести цепочку клеток от левого края до правого. Для этого нужно не меньше 8 клеток: по одной в каждом столбце. Чтобы при этом коснуться ещё и верхней, и нижней сторон, нужно от этой цепочки дойти до верхнего и нижнего края. Самый выгодный способ добиться этого – провести вертикальную цепочку через один из столбцов, а горизонтальную цепочку через одну из строк. Понятно, что для этого нужно всего 15 клеточек. Меньше нельзя, потому что путь от левого края до правого требует не менее 8 клеток, а путь от верхнего края до нижнего требует не менее 8 клеток, но пути пересекутся в одной точке. Теперь посчитаем периметр – всего 15 клеточек, значит до закрашивания было бы 60 сторон, но в горизонтальной и вертикальной полосках по 7 соседств по стороне. Каждое соседство убирает по 2 стороны из внешнего периметра, значит итого: $60 - 2\cdot14 = 32$.

Ответ: 1532**.**

6. Сумма семи подряд идущих натуральных чисел является кубом натурального числа. Найдите наименьшее возможное первое число среди этих семи чисел.

Решение.

Пусть первое число равно n. Тогда семь чисел имеют вид $n,\ n + 1,\ n + 2,\ ...,\ n + 6$.
Их сумма равна $7n + 21 = 7(n + 3)$. По условию это куб натурального числа: $7(n + 3) = k^3$.
Так как 7 делит правую часть, число k тоже должно делиться на 7. Пусть $k = 7m$. Тогда
$7(n + 3) = 343m^3, n + 3 = 49m^3$. Чтобы n было как можно меньше, берём $m = 1$. Тогда
$n + 3 = 49, n = 46$. Проверка: $46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 = 343 = 7^3$.

Ответ: 46**.**

7. Три мастера делают одинаковые детали. Первый и второй вместе выполняют заказ за 6 часов, второй и третий вместе - за 8 часов, первый и третий вместе - за 12 часов. За сколько часов все три мастера выполнят заказ вместе? Ответ укажите в минутах.

Решение.

Пусть производительности мастеров равны a, b и c заказов в час. Тогда $a+b=\frac{1}{6}$, $b+c=\frac{1}{8}$, $a+c=\frac{1}{12}$. Сложим эти три равенства: $2(a+b+c)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$.

Приведём к общему знаменателю 24: $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{4}{24}+\frac{3}{24}+\frac{2}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

Значит $2(a+b+c)=\frac{3}{8}$, $a+b+c=\frac{3}{16}$. Все вместе выполняют $\frac{3}{16}$ заказа за час, значит весь заказ они выполнят за $1:(3/16) = 16/3$

часа, то есть за $\frac{16}{3} \cdot 60 = 320$ минут.

Ответ: 320.

8. По лестнице можно подниматься прыжками на 1, 2 или 3 ступеньки. При этом запрещено делать два прыжка по 3 ступеньки подряд. Сколькими способами можно подняться на 10-ю ступеньку?

Решение.

Будем считать отдельно два типа способов. Пусть A_n – число способов попасть на n-ю ступеньку так, что последний прыжок не был прыжком на 3. Пусть B_n – число способов попасть на n-ю ступеньку так, что последний прыжок был прыжком на 3.
Тогда на следующую ступеньку можно прийти прыжком на 1 или 2 из любого состояния: $A_n = (A_{n-1} + B_{n-1}) + (A_{n-2} + B_{n-2})$. А прыжком на 3 можно прийти только после способа, который не оканчивался прыжком на 3: $B_n = A_{n-3}$.
Начинаем с $A_0 = 1$, $B_0 = 0$. Последовательно считаем значения до 10-й ступеньки. Получается: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 4$, $F_4 = 7$, $F_5 = 13$, $F_6 = 24$, $F_7 = 44$, $F_8 = 81$, $F_9 = 149$, $F_{10} = 250$, где $F_n = A_n + B_n$. Значит способов 250.

Ответ: 250

9. На столе лежат 17 красных и 24 синих жетона. За один ход выбирают любые два жетона и заменяют их одним новым жетоном по правилу: если выбранные жетоны одного цвета, кладут синий жетон; если разных цветов, кладут красный жетон. Так продолжают, пока не останется один жетон. Какого он будет цвета? В ответе запишите 1, если красного, и 2, если синего.

Решение.

Поставим красному жетону в соответствие число 1, а синему - число 0. Тогда правило замены совпадает со сложением по чётности: $1 + 1$ даёт 0, $0 + 0$ даёт 0, $1 + 0$ даёт 1. Значит чётность числа красных жетонов не меняется. Изначально красных жетонов 17, то есть нечётное число. В конце останется один жетон. Чтобы число красных было нечётным, этот единственный жетон должен быть красным.

Ответ: 1

10. За круглым столом сидят 20 жителей острова. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Каждый житель сказал одну и ту же фразу: *«Среди трёх следующих за мной по часовой стрелке жителей ровно два рыцаря».* Известно, что за столом есть хотя бы один рыцарь. Сколько рыцарей сидит за столом?

Решение.

Будем обозначать рыцаря буквой Р, а лжеца буквой Л. Фраза каждого жителя относится к трём следующим за ним людям. Если человек – рыцарь, то среди трёх следующих за ним действительно ровно два рыцаря. Если человек – лжец, то среди трёх следующих за ним не ровно два рыцаря. Посмотрим, как по трём подряд идущим жителям определяется следующий. Пусть три подряд идущих типа уже известны. Следующий тип должен быть таким, чтобы первый из этих трёх сказал правду, если он рыцарь, и соврал, если он лжец. Получаем такую таблицу переходов:

Три подряд	Следующий	Комментарий
ЛЛЛ	Л или Р	если дальше появится Р, возникнет невозможный фрагмент
ЛЛР	Л	

ЛРЛ	Л	
ЛРР	Р	
РЛЛ	невозможно	у рыцаря среди следующих трёх не может быть не два рыцаря
РЛР	Р	
РРЛ	Р	
РРР	Л	

Фрагмент РЛЛ невозможен сразу. Фрагменты ЛЛР и ЛРЛ после одного-двух шагов приводят к РЛЛ, значит они тоже не могут встречаться в круговой рассадке.

Если где-то встретились три лжеца подряд, то по таблице следующий может быть лжецом или рыцарем. Если когда-нибудь после такой цепочки появится рыцарь, снова получится запрещённый фрагмент. Поэтому вариант с ЛЛЛ возможен только тогда, когда все жители – лжецы. Но по условию хотя бы один рыцарь есть, значит ЛЛЛ тоже не встречается.

Остаются только четыре допустимых тройки: ЛРР, РРР, РРЛ, РЛР. По таблице они переходят друг в друга строго по циклу: ЛРР → РРР → РРЛ → РЛР → ЛРР. Значит вся рассадка по кругу вынужденно состоит из повторяющегося блока ЛРРР, с точностью до поворота стола. В каждом таком блоке из четырёх человек сидят один лжец и три рыцаря. Всего жителей 20, а $20 = 5 \cdot 4$. Поэтому таких блоков пять. Следовательно, число рыцарей равно $5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.

11. На доске написаны числа $2, 5, 8, 11, ..., 35$ – всего 12 чисел арифметической прогрессии. Нужно выбрать несколько чисел так, чтобы никакие два выбранных числа не были соседними в этой записи. Какое наибольшее возможное значение суммы выбранных чисел?

Решение.

Разобьём 12 мест на пары соседних мест: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$, $(9, 10)$, $(11, 12)$. Из каждой такой пары можно выбрать не более одного числа, иначе были бы выбраны соседние числа.
В каждой паре большее число стоит на чётном месте. Поэтому вклад выбранных чисел из пары не может превышать вклад числа на чётном месте этой пары. Значит вся сумма не может быть больше суммы чисел на чётных местах.
Числа на чётных местах: $5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35$. Их сумма равна
$5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 = 120$. Эта сумма достижима: выбираем все числа на чётных местах, и никакие два из них не соседние. Значит максимум равен 120.

Ответ: 120.

12. Робот движется по прямой от отметки 0 до отметки 16. За один ход он может перейти либо на 2 клетки вперёд, либо на 3 клетки вперёд. При этом два хода длины 2 подряд делать нельзя. Сколькими способами робот может добраться ровно до отметки 16.

Решение.

Пусть A_n – число способов попасть в точку n ходом длины 3 или начать путь без предыдущего хода длины 2, а B_n – число способов попасть в точку n ходом длины 2. Тогда после хода длины 2 следующий ход длины 2 запрещён. Удобнее считать последовательно. Обозначим $F(n, 0)$ – число способов быть в n, если последний ход не был двойкой, и $F(n, 1)$ – если последний ход был двойкой. Старт: $F(0, 0) = 1$. Из состояния 0 можно сделать ход $+ 2$ или $+ 3$, а из состояния 1 – только $+ 3$. Последовательно получаем для точек до 16: число способов попасть в 16 равно 10.
Например, это можно получить рекурсией:
$F(n, 1) = F(n - 2, 0)$, $F(n, 0) = F(n - 3, 0) + F(n - 3, 1)$. Подставляя значения до n=16, получаем 10.

Ответ: 10

13. Сколько существует последовательностей из 12 нулей и единиц, в которых ровно пять единиц и нигде не встречаются три нуля подряд?

Решение.

Поставим сначала пять единиц. Они образуют шесть промежутков для нулей: до первой единицы, между соседними единицами и после последней единицы.

Всего нужно распределить семь нулей по шести промежуткам, причём в каждом промежутке не больше двух нулей.

Без ограничения сверху число распределений равно $C_{12}^{5} = 792$.

Вычтем распределения, где в некотором промежутке хотя бы три нуля. Выбираем такой промежуток 6 способами, убираем из него 3 нуля, оставшиеся 4 нуля распределяем по 6 промежуткам: $C_{9}^{5} = 126$ способов.

Если два промежутка имеют хотя бы по три нуля, то после удаления по три нуля остаётся 1 ноль, который можно распределить $C_{6}^{5} = 6$ способами; пар промежутков $C_{6}^{2} = 15$.

По включениям-исключениям получаем $792 - 6 \cdot 126 + 15 \cdot 6 = 126$.

Ответ: 126

14. В коробке лежат карточки с числами от 1 до 50. Какое наименьшее количество карточек нужно взять, чтобы среди выбранных обязательно нашлись две карточки, сумма чисел на которых равна 51.

Решение.

Разобьём все карточки на пары с суммой 51: $(1, 50)$, $(2, 49)$, …, $(25, 26)$.
Всего получилось 25 пар. Если взять по одной карточке из каждой пары, можно выбрать 25 карточек и не получить пары с суммой 51. Значит 25 карточек недостаточно.
Если же взять 26 карточек, то по принципу Дирихле две из них обязательно попадут в одну и ту же пару. Их сумма будет равна 51. Значит минимальное количество карточек равно 26.

Ответ: 26.

15. На складе лежат коробки трёх видов: A, B и C. Всего коробок меньше 200. Известно, что коробок A ровно $\frac{2}{7}$ от общего числа, а коробок B ровно $\frac{3}{5}$ от числа коробок, не являющихся A. После того как 21 коробку C увезли, коробок B стало ровно $\frac{4}{7}$ от оставшегося числа коробок. Сколько коробок было на складе сначала?

Решение.

Пусть всего было N коробок. Тогда $A = \frac{2N}{7}$, значит N кратно 7.

Не А составляет $\frac{5N}{7}$. Коробок B равно $\frac{3}{5}$ от этого числа, то есть $B = \frac{3N}{7}$.

Тогда $C = N - \frac{2N}{7} - \frac{3N}{7} = \frac{2N}{7}$.

После вывоза 21 коробки C всего осталось $N - 21$ коробка, а число коробок B не изменилось и равно $\frac{3N}{7}$.

По условию $\frac{3N}{7} = \frac{4(N-21)}{7}$. Умножаем на 7: $3N = 4N - 84$, откуда $N = 84$.

Проверка: $A = 24$, $B = 36$, $C = 24$. После вывоза 21 коробки C остаётся 63 коробки, и $B = 36$ действительно составляет $\frac{4}{7}$ от 63.

Ответ: 84

16. У куба 8 вершин. Каждую вершину нужно покрасить в чёрный или белый цвет так, чтобы на каждой грани куба было чётное число чёрных вершин. Сколько существует таких раскрасок?

Решение.

Будем обозначать чёрный цвет числом 1, а белый – числом 0. Условие задачи означает, что сумма цветов четырёх вершин каждой грани должна быть чётной.
Пусть цвета нижней грани идут по кругу и равны $a,\ b,\ c,\ d$. На нижней грани должно быть чётное число чёрных вершин, поэтому для нижней грани есть 8 вариантов раскраски.
Теперь выберем цвет одной верхней вершины, например A. Это можно сделать 2 способами. После этого условия чётности на трёх боковых гранях однозначно определяют остальные верхние вершины B, C и D: каждая боковая грань уже содержит две нижние вершины и одну известную верхнюю, поэтому четвёртая вершина определяется однозначно.
Оставшаяся четвёртая боковая грань автоматически будет иметь чётное число чёрных вершин, потому что сумма условий по всем четырём боковым граням содержит каждую верхнюю и нижнюю вершину ровно два раза. Верхняя грань тоже автоматически получится чётной из-за чётности нижней грани.
Итак, всего $8 \cdot 2 = 16$ раскрасок.

Ответ: 16.