Летний математический турнир АПО, начинающие
22 августа 2026
Решения

1. Вожатый написал на доске трёхзначное число, а затем вычеркнул из него среднюю цифру. Получилось двузначное число, которое оказалось ровно в 9 раз меньше исходного. Найдите наибольшее трёхзначное число, обладающее таким свойством.

Решение.

Трёхзначное число получается из двузначного умножением на 9. Посмотрим на последние цифры. При умножении на 9 последняя цифра меняется так: 0 остаётся 0, из 1 получается 9, из 2 – 8, из 3 – 7, из 4 – 6, из 5 – 5, из 6 – 4, из 7 – 3, из 8 – 2, из 9 – 1.

После вычёркивания средней цифры последняя цифра сохраняется, поэтому у трёхзначного числа и у двузначного последние цифры совпадают. По таблице это бывает только при цифрах 0 и 5.

Проверим двузначные числа, оканчивающиеся на 5: $9 \cdot 15 = 135$ – вычёркиваем середину, получаем 15, подходит; $9 \cdot 25 = 225$ – получаем 25, подходит; $9 \cdot 35 = 315$ – получаем 35, подходит; $9 \cdot 45 = 405$ – получаем 45, подходит; $9 \cdot 55 = 495$ – получается 45, а не 55, не подходит; дальше 585, 675, 765, 855 – тоже не подходят.

Числа, оканчивающиеся на 0, не подходят вовсе: $9 \cdot 10 = 90$ – не трёхзначное, а у 180, 270, 360 и остальных первая цифра всегда меньше нужной.

Наибольшее из подходящих чисел – 405.

Ответ: 405.

2. Прямоугольный участок разделили на четыре прямоугольные грядки: одним разрезом вдоль и одним разрезом поперёк. Площадь левой верхней грядки равна 12 м², правой верхней – 18 м², левой нижней – 24 м². Найдите площадь всего участка, ответ дайте в квадратных метрах (одним числом без единиц измерения).

Решение.

У левой верхней и левой нижней грядок одинаковая ширина, а площадь нижней ровно вдвое больше: $24 = 2 \cdot 12$. Значит, нижняя полоса участка вдвое выше верхней.

У правой верхней и правой нижней грядок ширина тоже общая, а высоты – те же самые, что и слева. Поэтому правая нижняя грядка тоже вдвое больше правой верхней: $2 \cdot 18 = 36$ м².

Вся площадь участка равна $12 + 18 + 24 + 36 = 90$ м².

Ответ: 90.

3. Вожатый расставляет стулья для концерта. Если ставить их по 4 в ряд, лишними остаются 3 стула; если по 5 в ряд – остаются 4; если по 6 в ряд – остаются 5; а если по 7 в ряд – остаются 2. Какое наименьшее число стульев могло быть?

Решение.

Первые три условия означают, что если добавить к стульям ещё один стул, то полученное число разделится и на 4, и на 5, и на 6. Наименьшее такое число – 60, а остальные получаются из него умножением: 60, 120, 180, 240, 300, 360 и так далее.

Значит, стульев могло быть на один меньше: 59, 119, 179, 239, 299, 359 и так далее.

Остаётся выбрать из них те, которые при делении на 7 дают остаток 2. Проверяем по порядку: 59 даёт остаток 3, 119 – остаток 0, 179 – 4, 239 – 1, 299 – 5, а 359 – ровно 2.

Проверка: $359 = 4 \cdot 89 + 3 = 5 \cdot 71 + 4 = 6 \cdot 59 + 5 = 7 \cdot 51 + 2$.

Ответ: 359.

4. Сейчас маме и дочери вместе 40 лет, а четыре года назад мама была ровно в 7 раз старше дочери. Через сколько лет мама будет ровно вдвое старше дочери?

Решение.

Четыре года назад каждая из них была на 4 года младше, поэтому вместе им было $40 - 8 = 32$ года. Тогда мама была в 7 раз старше дочери, значит, их возрасты составляли 1 и 7 равных частей, а всего 8 частей. Одна часть равна $32:8 = 4$ года.

Итак, четыре года назад дочери было 4 года, а маме 28 лет. Сейчас дочери 8 лет, а маме 32 года.

Разница в возрасте не меняется со временем и равна $32 - 8 = 24$ года. Когда мама будет вдвое старше дочери, возраст мамы будет состоять из двух возрастов дочери, значит, разница в возрасте будет как раз равна возрасту дочери. Поэтому дочери тогда будет 24 года, а это произойдёт через $24 - 8 = 16$ лет.

Ответ: 16.

5. Из лагеря в город одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Велосипедист доехал до города, сразу повернул назад и ровно через час после старта встретил пешехода в 6 км от города. Скорость велосипедиста в 4 раза больше скорости пешехода. Найдите расстояние от лагеря до города в километрах (одним числом без единиц измерения)..

Решение.

За этот час пешеход прошёл столько, что до города ему осталось 6 км. Велосипедист за тот же час доехал до города и вернулся на 6 км назад, то есть проехал на 6+6=12 км больше, чем прошёл пешеход.

Велосипедист движется в 4 раза быстрее, поэтому за час он проезжает четыре таких же части пути, какую проходит пешеход. Разница составляет три части, и эти три части равны 12 км, значит, одна часть – это 12:3=4 км.

Пешеход прошёл 4 км, а до города ему оставалось ещё 6 км. Значит, от лагеря до города 4+6=10 км.

Проверка: велосипедист за час проехал 16 км – это 10 км до города и 6 км обратно.

Ответ: 10.

6. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 10. За один ход стирают любые два числа и записывают вместо них их разность (из большего вычитают меньшее). Так поступают, пока на доске не останется одно число. Какое наибольшее значение может принимать это число?

Решение.

Заметим, что когда два числа заменяют их разностью, сумма всех чисел на доске уменьшается на удвоенное меньшее из этих двух чисел, то есть на чётное число. Значит, чётность суммы всех чисел на доске не меняется. Сначала сумма равна 1+2+…+10=55 – она нечётна, поэтому и последнее число нечётно.

Кроме того, разность двух чисел не превосходит большего из них, поэтому все числа на доске всё время остаются не больше 10. Значит, последнее число не больше 10, а с учётом нечётности – не больше 9.

Значение 9 достижимо. Отложим девятку в сторону, а остальные числа занулим: $(10; 7) \to 3$, затем $(3; 3) \to 0$, далее $(8; 6) \to 2$, $(2; 2) \to 0$, потом $(5; 4) \to 1$, $(1; 1) \to 0$. Остались числа 0, 0, 0 и 9; три нуля двумя ходами превращаются в один ноль, а последний ход с числами 0 и 9 даёт 9.

Ответ: 9.

7. Сколько существует пятизначных чисел, произведение цифр которых равно 45?

Решение.

Так как $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, ни одна цифра числа не равна нулю. Множитель 5 может дать только цифра 5, причём такая цифра ровно одна: числа 25 среди цифр нет.

Оставшиеся цифры дают в произведении 9, что возможно двумя способами: либо одна цифра 9, либо две цифры 3. Значит, набор цифр – это либо 9, 5, 1, 1, 1, либо 3, 3, 5, 1, 1.

В первом случае нужно выбрать место для девятки (5 способов) и место для пятёрки из оставшихся четырёх (4 способа) – всего $5 \cdot 4 = 20$ чисел. Во втором случае выбираем место для пятёрки (5 способов) и два места для троек из оставшихся четырёх (6 способов) – всего $5 \cdot 6 = 30$ чисел.

Итого $20 + 30 = 50$ чисел.

Ответ: 50.

8. Числа 1, 2, 3, …, 2026 выписали в ряд по возрастанию. Сначала стёрли все числа, стоящие на нечётных местах. Затем в получившемся ряду снова стёрли все числа, стоящие на нечётных местах, и так далее, пока не осталось одно число. Какое это число?

Решение.

После первого стирания в ряду остались числа 2, 4, 6, 8, … – то есть все числа, которые делятся на 2.

В новом ряду на первом месте стоит 2, на втором 4, на третьем 6, на четвёртом 8 и так далее. На нечётных местах оказались 2, 6, 10, …, а на чётных – 4, 8, 12, …, то есть числа, делящиеся на 4. Значит, после второго стирания остались кратные 4.

Дальше всё повторяется: остаются кратные 8, потом кратные 16, затем 32, 64, 128, 256, 512 и, наконец, кратные 1024.

Среди чисел от 1 до 2026 кратное 1024 ровно одно – само число 1024, ведь следующее такое число 2048 уже больше 2026. На нём процесс и остановится.

Ответ: 1024.

9. На кухне стоят два пустых бидона – на 8 литров и на 13 литров – и большая бочка сиропа. Разрешается наполнить бидон доверху из бочки, вылить содержимое бидона обратно в бочку или перелить сироп из одного бидона в другой, пока первый не опустеет или второй не наполнится. Каждое такое действие считается одним переливанием. За какое наименьшее число переливаний можно получить ровно 7 литров сиропа в одном из бидонов?

Решение.

Заметим, что после любого разумного действия один из бидонов обязательно оказывается либо пустым, либо полным: при наполнении полон второй, при выливании пуст первый, а при переливании либо опустел первый, либо наполнился второй.

Поэтому из каждого состояния ведёт лишь одно новое продолжение в каждую сторону – «переливаем из большого бидона в малый» или «из малого в большой», – и все состояния выстраиваются в две цепочки. Запишем количество сиропа парой (в 8-литровом; в 13-литровом).

Первая цепочка: $(0; 0) \to (0; 13) \to (8; 5) \to (0; 5) \to (5; 0) \to (5; 13) \to (8; 10) \to (0; 10) \to (8; 2) \to (0; 2) \to (2; 0) \to (2; 13) \to (8; 7)$. Семь литров получаются на двенадцатом переливании.

Вторая цепочка начинается с наполнения восьмилитрового бидона, и в ней семь литров появляются только на двадцать шестом переливании.

Значит, быстрее чем за 12 переливаний семь литров не получить.

Ответ: 12.

10. В непрозрачном ящике лежат ёлочные шары пяти цветов, по 12 штук каждого цвета. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть не глядя, чтобы среди вынутых наверняка нашлись четыре шара какого-то одного цвета и три шара какого-то другого цвета?

Решение.

Сначала покажем, что 20 шаров может не хватить. Вынем все 12 шаров одного цвета и ещё по 2 шара каждого из остальных четырёх цветов – всего $12 + 8 = 20$ шаров. Четыре шара одного цвета здесь есть, а трёх шаров какого-то другого цвета нет.

Пусть теперь вынут 21 шар, но нужного набора нет. Возможны два случая. Если ни одного цвета не набралось по четыре шара, то каждого цвета не больше трёх и всего шаров не больше $3 \cdot 5 = 15$ – противоречие.

Если же какой-то цвет встретился не менее четырёх раз, то все остальные цвета встречаются не более двух раз, и всего шаров не больше $12 + 2 \cdot 4 = 20$ – снова противоречие.

Значит, 21 шара всегда достаточно.

Ответ: 21.

11. Какое наибольшее число клеток квадрата 6×6 можно закрасить так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было трёх закрашенных клеток подряд?

Решение.

Оценка. Разобьём каждую строку на две тройки соседних клеток: первые три клетки и последние три. В каждой тройке закрашено не больше двух клеток, иначе получились бы три закрашенные клетки подряд. Значит, в строке не больше четырёх закрашенных клеток, а всего их не больше $4 \cdot 6 = 24$.

Пример. Оставим незакрашенными в точности те клетки, у которых сумма номера строки и номера столбца делится на 3, а все остальные закрасим.

В каждой строке незакрашенными оказываются ровно две клетки, номера которых отличаются на 3. Значит, между ними стоят ровно две закрашенные клетки, а по краям строки закрашенных подряд тоже не больше двух – трёх подряд нигде нет. Для столбцов рассуждение точно такое же.

Незакрашенных клеток $2 \cdot 6 = 12$, поэтому закрашено $36 - 12 = 24$ клетки.

Ответ: 24.

12. Со склада по одной и той же дороге отправили заказ: сначала выехала грузовая машина, а позже – курьер на скутере. Оба ехали с постоянными скоростями. Когда машина проехала 36 км, курьер только выехал со склада. В тот момент, когда курьер проехал 25 км, машина была в 57 км от склада. К дому заказчика они приехали одновременно. Найдите расстояние от склада до дома заказчика в километрах (одним числом без единиц измерения)..

Решение.

Пока курьер проезжал свои первые 25 км, машина проехала $57 - 36 = 21$ км. Значит, за одно и то же время курьер проезжает 25 км, а машина – только 21 км, и курьер сокращает отставание на $25 - 21 = 4$ км.

Сначала курьер отставал от машины на 36 км. Приехали они одновременно, то есть к концу пути курьер отставание полностью ликвидировал. Сокращая по 4 км, он потратил на это $36 : 4 = 9$ таких промежутков времени.

За каждый промежуток курьер проезжает 25 км, поэтому весь путь равен $9 \cdot 25 = 225$ км.

Проверка: за это время машина проехала $9 \cdot 21 = 189$ км и вместе с первыми 36 км получила те же 225 км.

Ответ: 225.

13. Квадрат 5×5 разрезали по линиям сетки на клетчатые прямоугольники так, что никакие два из них не равны между собой (прямоугольники 1×2 и 2×1 считаются равными). Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться?

Решение.

Оценка. Выпишем все клетчатые прямоугольники, помещающиеся в квадрат 5×5, в порядке возрастания площади: 1×1 (площадь 1), 1×2 (2), 1×3 (3), 1×4 и 2×2 (по 4), 1×5 (5), 2×3 (6), 2×4 (8) и так далее.

Если бы прямоугольников было восемь, то даже самые маленькие из них дали бы суммарную площадь не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 8 = 33$, а площадь квадрата равна всего 25. Значит, прямоугольников не больше семи.

Пример на семь прямоугольников (строки нумеруем сверху вниз, столбцы – слева направо): клетка (1;1) – это 1×1; клетки (1;2) и (1;3) – прямоугольник 1×2; столбец 4 в строках 1–3 – прямоугольник 3×1; весь столбец 5 – прямоугольник 5×1; столбец 1 в строках 2–5 – прямоугольник 4×1; строки 2–3 в столбцах 2–3 – квадрат 2×2; строки 4–5 в столбцах 2–4 – прямоугольник 2×3.

Все семь частей попарно различны, а их площади $1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 4 + 6 = 25$ как раз покрывают весь квадрат.

Ответ: 7.

14. Из чисел 1, 2, 3, …, 30 нужно выбрать как можно больше чисел так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ровно на 3 и не отличались ровно на 4. Сколько чисел удастся выбрать?

Решение.

Оценка. Посмотрим, сколько чисел можно взять из семи подряд идущих. Возьмём для примера числа от 1 до 7 и соединим стрелками пары, которые отличаются на 3 или на 4:

1→4→7→3→6→2→5→1.

Получился круг, в который попали все семь чисел, причём соседей по кругу брать вместе нельзя. В круге из семи чисел нельзя отметить больше трёх попарно несоседних, поэтому из любых семи подряд идущих чисел можно взять не больше трёх: для любой другой семёрки стрелки расставляются точно так же.

Разобьём все числа на группы 1–7, 8–14, 15–21, 22–28 и отдельно 29, 30. Получаем не больше $3 \cdot 4 + 2 = 14$ чисел.

Пример на 14 чисел: 1, 2, 3, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 29, 30. Внутри каждой тройки разности равны 1 или 2, а числа из разных троек отличаются не меньше чем на 5.

Ответ: 14.

15. Какое наибольшее число прямоугольников 1×4 можно вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата 6×6?

Решение.

По площади кажется, что можно вырезать девять прямоугольников: в квадрате 36 клеток, а $36 : 4 = 9$. Но девять вырезать нельзя.

Напишем в каждой клетке сумму номера её строки и номера её столбца. Отметим те клетки, где эта сумма равна 5 или 9. Сумма 5 встречается в четырёх клетках, сумма 9 – тоже в четырёх, всего отмеченных клеток восемь.

Любой прямоугольник 1×4 накрывает четыре клетки, у которых суммы идут подряд: четыре числа подряд, а среди четырёх подряд идущих чисел ровно одно даёт остаток 1 при делении на 4, то есть равно 5 или 9 (других таких сумм в квадрате нет). Значит, каждый прямоугольник накрывает ровно одну отмеченную клетку, а отмеченных клеток всего восемь – больше восьми прямоугольников не вырежешь.

Восемь вырезать можно. В строках 1–4 положим по горизонтальному прямоугольнику на клетки столбцов 1–4 – это четыре прямоугольника. В столбцах 5 и 6 положим по вертикальному прямоугольнику на клетки строк 1–4 – ещё два. И в строках 5 и 6 положим ещё по горизонтальному прямоугольнику на столбцы 1–4 – итого восемь. Незанятым останется квадратик 2×2 в правом нижнем углу, в него прямоугольник 1×4 не влезает.

Ответ: 8.

16. На стол по кругу выкладывают 12 карточек с числами 1, 2, 3, …, 12 – каждое число ровно один раз. Затем смотрят на все 12 сумм четырёх подряд лежащих карточек и выбирают из этих сумм наименьшую. Какое наибольшее значение может принимать эта наименьшая сумма?

Решение.

Сумма всех чисел равна $1 + 2 + ... + 12 = 78$. Каждая карточка входит ровно в четыре из двенадцати четвёрок подряд лежащих карточек, поэтому сумма всех двенадцати сумм равна $4 \cdot 78 = 312$.

Предположим, что каждая из двенадцати сумм не меньше 26. Тогда все вместе они дают не меньше $12 \cdot 26 = 312$. Но их сумма в точности равна 312, значит, каждая из них равна ровно 26.

Сравним две соседние четвёрки: вторая получается из первой выбрасыванием крайней карточки слева и добавлением следующей справа. Раз обе суммы равны 26, эти две карточки несут одинаковые числа. Значит, числа повторяются через каждые четыре позиции и каждое встречалось бы трижды – но все числа различны. Противоречие.

Поэтому наименьшая сумма не больше 25. Пример выкладки, где она равна 25: 1, 4, 9, 11, 2, 6, 7, 10, 3, 5, 8, 12 по кругу. Двенадцать сумм здесь равны 25, 26, 28, 26, 25, 26, 25, 26, 28, 26, 25, 26.

Ответ: 25.