Зимний математический турнир АПО
7 февраля 2026
Любители — Решения

1. Для двузначного числа X считают два контрольных значения: K_1 – квадрат суммы цифр числа X, K_2 – сумма цифр числа X^2. Найдите все двузначные числа X, для которых выполнено равенство $K_1 = K_2$. В ответе расположите найденные числа в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Раз число X – двузначное, то $10 \leq X \leq 99$, а следовательно, $100 \leq X^2 \leq 9801$. Максимальная сумма цифр среди чисел меньших 9801 достигается, например, на 9799, и равна $9 + 7 + 9 + 9 = 34$. Обозначим сумму цифр числа X за $s(X)$, тогда так как $(s(X))^2 = s\left(X^2\right) \leq 34$, то $s(X) \leq 5$. Таким образом, остаётся всего 15 кандидатов: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50. Проводя для них проверку условия, получаем, что подходят только: $10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 30,\ 31$.

Ответ: $10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 30,\ 31$**.**

2. В городе Листограде за 30 дней фиксируют ясные и пасмурные дни. Известно, что в любом подряд идущем отрезке из 5 дней, ясных бывает не больше одного. Кроме того, в любом подряд идущем отрезке из 6 дней, ясный день будет обязательно. Сколько всего ясных дней могло быть за эти 30 дней? В ответе расположите найденные значения в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Разобьём 30 дней на 6 непересекающихся блоков по 5 дней, то есть:

$$1 - 5,\ 6 - 10,\ \ldots,\ 21 - 25,\ 26 - 30$$

Так как в каждом блоке из 5 дней ясных не более одного, то всего ясных дней не больше 6. Если же разбить 30 дней на блоки по 6 дней, то по условию в каждом из них есть хотя бы один ясный день, а значит ясных дней не меньше 5. Покажем, что варианты в 5 или 6 ясных дней достижимы. Если взять ясными каждый пятый день, то в любых пяти подряд днях может быть максимум один из этих дней, а в любые шесть подряд идущих дней обязательно попадёт хотя бы один ясный день. Аналогично, возьмём ясными каждый 6-й день, и тогда ясных дней будет ровно пять и условия задачи тоже выполняются.

Ответ: $5,\ 6$**.**

3. Пятеро ребят сидят за круглым столом каждый с каким-то количеством жетонов. У первого в начале 81 жетон, а у остальных – разное количество. Они проводят 5 раундов по часовой стрелке. В своём раунде участник делает так: каждому из остальных он отдаёт столько своих жетонов, сколько у другого игрока сейчас есть. После того как все пятеро сделали это по одному разу, оказалось, что у всех стало равное количество жетонов. Сколько жетонов было у каждого из ребят в начале? Значения напишите по порядку ходов игроков через запятую без пробелов.

Решение.

Обозначим финальное общее количество жетонов у каждого через T. Заметим, что если в некотором раунде игрок раздавал жетоны, то у каждого другого стало в 2 раза больше жетонов. Следовательно, так как после пятого раунда у всех по T жетонов, то перед ним было:

$$\left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, T + 4\cdot\frac{T}{2}\right) = \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \frac{T}{2}, 3T\right)$$

Продолжая данную процедуру, получаем, что перед четвёртым раундом у всех было:

$$\left(\frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{2} + 3\cdot\frac{T}{4} + \frac{3}{2}T, \frac{3}{2}T\right) = \left(\frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{T}{4}, \frac{11}{4}T, \frac{3}{2}T\right)$$

Перед третьим раундом:

$$\left(\frac{T}{8}, \frac{T}{8}, \frac{21}{8}T, \frac{11}{8}T, \frac{3}{4}T\right)$$

Перед вторым раундом:

$$\left(\frac{T}{16}, \frac{41}{16}T, \frac{21}{16}T, \frac{11}{16}T, \frac{3}{8}T\right)$$

И изначально было:

$$\left(\frac{81}{32}T, \frac{41}{32}T, \frac{21}{32}T, \frac{11}{32}T, \frac{3}{16}T\right)$$

Получаем: $\frac{81}{32}T = 81$, значит $T = 32$, тогда изначально у ребят было следующее количество жетонов:

$$(81,\ 41,\ 21,\ 11,\ 6)$$

Ответ: 81, 41, 21, 11, 6.

4. На заводе делают панели размера $1\times1\times2$. Каждая панель окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Из 60 красных и 48 синих панелей собрали куб размера $6\times6\times6$. Какое наибольшее число красных клеток может оказаться на поверхности куба?

Решение.

Так как панели имеют размер $1\times1\times2$, то будем говорить, что каждая из них состоит из кубиков размера $1\times1\times1$. Если такой единичный кубик будет стоять в углу куба, то на поверхности у него будет видно 3 клеточки, если на ребре, но не в углу, то будет видно 2 стороны, если на грани, но не на ребре, то видно 1 сторону, а если внутри, то не будет видно ни одной стороны.

Теперь заметим, что у куба 8 углов, если туда поместить красные кубики, то будет видно $8\cdot3 = 24$ красные клеточки. У куба 12 рёбер, на каждом ребре имеется 4 не угловых кубика, то есть всего их $12\cdot4 = 48$ штук, если они красные, то это даст ещё 96 красных клеточек на поверхности. На каждой грани осталось по $4\cdot4 = 16$ кубиков, у которых видно только одну сторону, тогда всего таких кубиков $6\cdot16 = 96$ штук. Красных кубиков у нас всего 120 штук, сначала будем заполнять ими углы и рёбра. Для этого нам понадобится $8 + 48 = 56$ кубиков, а их вклад будет равен $24 + 96 = 120$ красным квадратикам на поверхности куба. После этого останется ещё $120 - 56 = 64$ красных кубиков, каждый из которых в лучше случае может дать только одну красную клеточку на поверхности. Итого красных клеточек на поверхности не более чем $120 + 64 = 84$ штуки.

Покажем теперь достижимость данной оценки. Сделаем все кубики на рёбрах красными, для этого нужно 56 кубиков, то есть 28 красных панелей. После этого у нас остаётся ещё 32 красные панели, которыми мы замостим центральную часть граней. А именно, на 4 грани нужно $4 \cdot 16 = 64$ кубика или как раз 32 панели. Итого, мы получили: $3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 1 \cdot 16 \cdot 4 = 184$ красных квадратика.

Ответ: 184.

5. Два сервера отправляют файлы с периодами a и b секунд, $a, b \in N$. Известно, что $\text{НОК}(a, b) - \text{НОД}(a, b) = \frac{1}{5}ab$. Чему могут быть равны значения a и b, если известно, что $a < b$. В ответ запишите значения через запятую без пробелов.

Решение.

Обозначим $d = \text{НОД}(a, b)$, тогда можно записать, что $a = dx$, $b = dy$, причём $\text{НОД}(x, y) = 1$. Так как x и y – взаимнопросты, то $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(dx, dy) = dxy$, также известно, что $ab = dx \cdot dy = d^2xy$. Подставляем в условие:

$$dxy - d = \frac{1}{5}d^2xy$$

$$d(xy - 1) = \frac{1}{5}d^2xy$$

Разделим на d, так как $d > 0$:

$$xy - 1 = \frac{1}{5}dxy$$

Откуда:

$$d = \frac{5(xy-1)}{xy} = 5 - \frac{5}{xy}$$

Так как d – натуральное число, то $\frac{5}{xy}$ должно быть целым, а значит $xy = 1$ или $xy = 5$. Если $xy = 1$, то $d = 5 - \frac{5}{1} = 0$, что невозможно, так как $\text{НОД}(a, b) > 0$. Если же $xy = 5$, то $d = 5 - \frac{5}{5} = 4$, а значит так как $xy = 5$, $(x, y) = (1, 5)$ или $(x, y) = (5, 1)$, что даёт, что $(a, b) = (4 \cdot 1, 4 \cdot 5) = (4, 20)$ или $(a, b) = (4 \cdot 5, 4 \cdot 1) = (20, 4)$. Второй вариант не подходит, так как $a < b$ по условию.

Ответ: $4, 20$.

6. В мастерской есть 14 разных гирек массами $1, 2, 3, ..., 14$ граммов. Нужно взять ровно 12 гирек так, чтобы суммарная масса была равна 90 г. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Суммарная масса всех гирек равна $1 + 2 + \ ... + 14 = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$. Если выбрали 12 гирек, значит 2 гирьки были не выбраны. Обозначим их массы за x и y, соответственно. Тогда сумма выбранных равна $105 - (x + y) = 90$, следовательно $x + y = 15$. Следовательно, нужно посчитать количество различных пар чисел от 1 до 14 дающих 15 в сумме. Всего таких пар 7.

Ответ: 7.

7. В компьютерной игре есть 15 локаций. Между некоторыми парами локаций расположены порталы, причём каждый портал обслуживается одной из трёх гильдий: красной, синей или зелёной. Известно, что если любая одна гильдия внезапно отключит все свои порталы, то игрок всё равно сможет добраться из любой локации в любую другую, используя порталы двух оставшихся гильдий, возможно с пересадками. Какое минимальное число порталов может быть в игре?

Решение.

Пусть всего m порталов, а у гильдий m_1, m_2, m_3 порталов соответственно. Отождествим локации с вершинами графа, а порталы с его рёбрами. Тогда если отключится первая гильдия, то останется граф на 15 вершинах с $m - m_1$ рёбрами, и он должен быть связным. Связный граф на 15 вершинах имеет минимум $15 - 1 = 14$ рёбер, а значит $m - m_1 \geq 14$. Аналогичным образом, $m - m_2 \geq 14$, $m - m_3 \geq 14$. Сложим три данных неравенства:

$$\left(m - m_1\right) + \left(m - m_2\right) + \left(m - m_3\right) \geq 42$$

Левая часть преобразуется следующим образом: $3m - \left(m_1 + m_2 + m_3\right) = 3m - m = 2m$. Отсюда $2m \geq 42$, $m \geq 21$. То есть меньше 21 портала быть не может.

Покажем теперь, что 21 портала достаточно. Пронумеруем локации $1, 2, ..., 15$. Красные порталы: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$, $(9, 10)$, $(11, 12)$, $(13, 14)$, синие: $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(6, 7)$, $(8, 9)$, $(10, 11)$, $(12, 13)$, $(14, 15)$, зелёные: $(1, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 8)$, $(7, 10)$, $(9, 12)$, $(11, 14)$, $(13, 15)$. Легко видеть, что любые две гильдии дают путь через все вершины.

Ответ: 21.

8. На столе лежат 10 карточек с числами от 1 до 10. Их выстроили в ряд в случайном порядке. Назовём конфликтом пару карточек (x, y) (не обязательно соседних), если карточка с большим числом стоит левее карточки с меньшим. Карточки выложили в ряд произвольным образом. Какое число конфликтов может быть? В ответ запишите сумму всех возможных значений количества конфликтов.

Решение.

Минимум числа конфликтов равен нулю, ведь если карточки расположены по возрастанию, то ни одной конфликтной пары нет. Если же карточки стоят по убыванию, то каждая пара карточек образует конфликт. Тогда число конфликтов равно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Также заметим, что если поменять местами две соседние карточки, то все остальные карточки сохраняют относительный порядок и меняется порядок только данной пары. Значит число конфликтов изменится на $+1$ или -1. Начнём с возрастающего ряда и будем увеличивать количество конфликтов. Будем протаскивать карточку 10 влево, меняя её местами с соседом слева, каждый такой обмен добавляет один конфликт. Так мы получим количество конфликтов от 0 до 9. Затем аналогично протаскиваем 9 и так далее, пока не построим расположение карточек в убывающем порядке. Тогда ответ:

$$1 + 2 + \ldots + 45 = \frac{45 \cdot 46}{2} = 1035$$

Ответ: 1035.

9. В музее на каждом экспонате стоит трёхзначный инвентарный код N. Для контроля заведующий вычисляет сумму цифр этого кода. Оказалось, что для одного экспоната контрольное число получилось ровно в 11 раз меньше самого кода. Найдите все возможные такие трёхзначные коды N.

Решение.

Пусть $N = 100a + 10b + c$, обозначим за $S = a + b + c$ – сумма цифр числа N. По условию: $a + b + c = \frac{100a+10b+c}{11}$, откуда: $11 \cdot (a + b + c) = 100a + 10b + c$, то есть $89a - b - 10c = 0$ или $b + 10c = 89a$. В силу того, что b и c – цифры, имеем $b + 10c \leq 9 + 10 \cdot 9 = 99$, значит $89a \leq 99$, следовательно $a \leq 1$, а так как a не может быть равно нулю, то $a = 1$. Откуда $b + 10c = 89$, перепишем равенство следующим образом: $b = 89 - 10c$, чтобы b оказалось цифрой должно быть выполнено $0 \leq 89 - 10c \leq 9$, откуда $8 \leq c \leq 8$, то есть $c = 8$. Тогда $b = 89 - 80 = 9$, откуда $N = 198$.

Ответ: 198.

10. На собрании математического кружка присутствует преподаватель и несколько учеников. Известно, что возраст преподавателя на 24 года больше, чем средний возраст всех учеников, а также на 20 лет больше, чем средний возраст всех присутствующих включая его. Сколько всего людей было на собрании?

Решение.

Обозначим за n число учеников, s – средний возраст учеников, а T – возраст преподавателя, m – средний возраст всех присутствующих. По условию: $T = s + 24$, $T = m + 20$, следовательно $m = T - 20$. Так как сумма возрастов всех учеников равна ns, то можно записать $m = \frac{ns+T}{n+1} = \frac{ns+(s+24)}{n+1} = \frac{(n+1)s+24}{n+1} = s + \frac{24}{n+1}$. С другой стороны, $m = T - 20 = (s + 24) - 20 = s + 4$, а значит:

$$s + \frac{24}{n+1} = s + 4$$

Откуда, $\frac{24}{n+1} = 4, n + 1 = 6$. А значит всего на собрании было 6 человек.

Ответ: 6.

11. В киберспортивной лиге выступали 12 команд. Они сыграли круговой турнир: каждая команда с каждой сыграла ровно один матч. За победу дают 1 очко, за ничью 0.5, а за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что у всех участвующих команд разное число очков, а команда, занявшая второе место набрала ровно столько очков, сколько заработали команды с 8-го по 12-ое места. Как закончился матч между командами, занявшими 7-ое и 9-ое места соответственно? В ответе запишите сначала сколько очков набрали команды с 8-го по 12-ое месте в сумме, а затем без пробелов запишите

место команды победителя в игре между 7-ой и 9-ой командой, если же была ничья, то допишите 0.

Решение.

С 8-го по 12-ое места расположены пять команд, а значит всего между собой они сыграли $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ матчей. Каждый матч суммарно даёт ровно 1 очко (или одно победителю и ноль проигравшему, или $0.5 + 0.5 = 1$ в случае ничьей). Значит, внутри нижней пятёрки суммарно разыграно ровно 10 очков, то есть они вместе набрали не меньше 10. Значит у команды со второго места как минимум 10 очков.

Заметим далее, что максимум очков, которые может получить команда за 11 матчей – 11 очков. Если бы команда на втором месте набрала 10.5 очков, то это означало бы 10 побед и 1 ничью. А тогда команда, занявшая первое место должна была набрать 11 очков, что означает 11 побед. Но тогда у команды со второго места не может быть 10 побед, так как она проиграла лидеру. Следовательно, у команды со второго места не более 10 очков.

Итак, значит команда, занявшее место номер 2 набрала ровно 10 очков и столько же очков в сумме у команд с 8-го по 12-ое места. Следовательно, данные команды в матчах против команд с мест $1 - 7$ не набрали ни одного очка (ведь 10 очков они точно разыгрывают между собой). Итак, команда с 9-го места проиграла команде с 7 -го места.

Ответ: 107.

12. В онлайн-платформе есть 100 авторов, которые делят между собой весь рекламный доход за месяц – всего 100 баллов (у кого-то может быть 0, также у авторов может быть нецелое число баллов). Известно, что любые 66 авторов вместе получают не меньше 50 баллов. Какое наибольшее число баллов может получить один автор?

Решение.

Обозначим полученные баллы следующим образом: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ и упорядочим авторов так, чтобы они расположились в порядке возрастания количества полученных баллов, то есть: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{100}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 100$. Среди всех наборов из 66 авторов наименьшую суммарную выплату даст набор из 66 самых маленьких значений, то есть: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{66} \ge 50$. Отсюда следует, что среднее первых 66 чисел не меньше $\frac{50}{66}$, а значит и максимальное среди них тоже $x_{66} \ge \frac{50}{66}$. А поскольку числа расположены по не убыванию, то каждое последующее число баллов тоже не менее $\frac{50}{66}$. То есть: $x_{67} + x_{68} + \ldots + x_{99} \ge 33\cdot\frac{50}{66} = 25$. Таким образом сумма первых 99 чисел не менее, чем $50 + 25 = 75$. Тогда: $x_{100} \le 100 - 75 = 25$. Приведём пример, где достигается данная оценка. Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_{99} = \frac{50}{66}$, тогда их сумма равна $99\cdot\frac{50}{66} = 75$, а тогда $x_{100} = 25$.

Ответ: 25.

13. На выставке робот собрал мозаику 8×8 из квадратных плиток 1×1, после чего он разрезал её лазером на детали двух типов: квадратные модули 2×2 и длинные планки 1×4. Известно, что суммарная длина всех лазерных разрезов оказалась равна 54. Сколько деталей каждого вида получилось? Сначала запишите количество квадратных деталей, а затем количество прямоугольных деталей без пробелов.

Решение.

Всего квадратиков 1×1 в исходной мозаике: $8\cdot8 = 64$. Площадь каждой детали, которую робот может вырезать равна $1\cdot4 = 2\cdot2 = 4$. Значит, всего деталей $\frac{64}{4} = 16$. Обозначим, что квадратных деталей всего x штук, а прямоугольных – y штук, таким образом $x + y = 16$.

Заметим, что каждый разрез добавляет к суммарному периметру деталей удвоенную свою длину, ведь линия разреза становится границей сразу двух деталей. Значит, сумма периметров всех деталей равна сумме периметра исходной мозаике и удвоенной суммарной длины всех разрезов: $P = 4\cdot8 + 2\cdot54 = 140$. Периметр квадрата 2×2 равен 8, а периметр прямоугольника 1×4 равен 10. То есть: $8x + 10y = 140$. Так как $x + y = 16$, то $x = 16 - y$, откуда $8\cdot(16 - y) + 10y = 140$, $y = 6$, тогда $x = 16 - 6 = 10$.

Ответ: 106.

14. В лаборатории есть два типа роботов: «сканы» – всегда выводящие верный ответ и «глюки», всегда выводящие неверный ответ. На проверке работоспособности выставили 65 роботов, после чего они по очереди вывели по одному сообщению. Каждый робот выводил фразу: «среди всех предыдущих сообщений верных ровно на 20 меньше, чем неверных». Сколько «сканов» было на проверке работоспособности?

Решение.

Обозначим, что после k сообщений было T_k – число верных и F_k – число неверных, $D_k = F_k - T_k$ – разность между количеством неверных и верных сообщений. Таким образом, фраза очередного робота означает, что $D_k = 20$, где k – число уже сделанных сообщений. Рассмотрим, как меняется D после нового сообщения. Если сообщение верно, то $T_{k+1} = T_k + 1$, а $F_{k+1} = F_k$, тогда имеем $D_{k+1} = F_{k+1} - T_{k+1} = F_k - \left(T_k + 1\right) = D_k - 1$. Если же сообщение неверное, то имеем: $D_{k+1} = \left(F_k + 1\right) - T_k = D_k + 1$.

Далее заметим, что пока $D_k \neq 20$, выступает «глюк» и D_{k+1} будет на 1 больше, а так как изначально $D_0 = 0$, то можно выписать, что:

$$D_1 = 1,\ D_2 = 2,\ \ldots,\ D_{20} = 20.$$

То есть первые 20 роботов являются «глюками». Далее 21-й робот будет «сканом», ведь $D_{20} = 20$, после чего $D_{21} = 19$, а значит 22-й – «глюк». Далее данное чередование продолжится. Итак, первые 20 – «глюки», а значит на чередование остаётся 45 роботов, первый из которых «скан», а значит всего там 23 «скана».

Ответ: 23.

15. В честь наступления 2026 года Настя решила найти последнюю цифру числа, равного сумме квадратов натуральных чисел от 1 до 2026. Какая цифра у неё могла получиться?

Решение.

Последняя цифра суммы чисел это есть её остаток при делении на 10. Запишем последние цифра квадратов чисел от 1 до 10:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Сумма этих последних цифр $1 + 4 + 9 + ... + 1 + 0 = 45$. Тогда остаток при делении на 10 равен 5. Следовательно, каждые 10 подряд идущих квадратов дают сумму с последней цифрой 5. $2026 = 10\cdot 202 + 6$, то есть будет 202 блока по 10 чисел, каждый из которых даёт вклад 5: $202\cdot 5 = 1010$, то есть остаток при делении на 10 равен нулю. Остаются 6 последних чисел, их последние цифры – от 1 до 6, значит сумма последних цифр квадратов равна: $1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 = 31$, что даёт остаток 1 при делении на 10. Итого, значит последняя цифра данной суммы будет равна 1.

Ответ: 1.

16. На круглом циферблате отмечены 25 точек, каждая из которых окрашена либо в оранжевый, либо в фиолетовый цвет. Некоторые пары точек соединены нитками, причём каждая нитка соединяет точки разных цветов. Известно, что ни у каких двух оранжевых кнопок не совпадает число ниток, выходящих из них. Какое наибольшее число оранжевых точек может быть на циферблате?

Решение.

Обозначим r – число оранжевых кнопок, b – число фиолетовых кнопок, тогда $r + b = 25$. Поскольку нитки идут только между точками разных цветов, то каждая оранжевая точка может быть соединена только с фиолетовыми, значит её число проводков не превосходит b. То есть возможные значения числа ниточек у некоторой оранжевой точки: $0, 1, 2, ..., b$, то есть всего $b + 1$ различных значений. По условию у всех оранжевых точек числа ниточек попарно различны, а значит оранжевых точек не более, чем $b + 1$: $r \leq b + 1$, а так как $b = 25 - r$, то $r \leq (25 - r) + 1$, то есть $r \leq 13$. Значит больше 13 оранжевых точек быть не может.

Пример строится следующим образом: обозначим за O_0, O_1, ..., O_{12} – 13 оранжевых точек и F_1, ..., F_{12} – 12 фиолетовых кнопок. O_0 ни с чем не соединяем, а для k от 1 до 12 соединяем O_k с F_1, F_2, ..., F_k. Тогда у оранжевых точек будет ровно от 0 до 12 ниточек – все числа разные, и каждая ниточка соединяет разные цвета.

Ответ: 13.