Весенний турнир юных математиков 2026
Любители
30 мая 2026
Решения

1. У трёх натуральных чисел попарные суммы равны $35,\ 39,\ 44$. Найдите произведение этих трёх чисел.

Решение.

Пусть числа равны $x,\ y,\ z$. Тогда $x + y = 35,\ y + z = 39,\ z + x = 44$. Сложим все три равенства: $2(x + y + z) = 35 + 39 + 44 = 118$, откуда $x + y + z = 59$. И следовательно, $x = 59 - 39 = 20,\ y = 59 - 44 = 15,\ z = 59 - 35 = 24$. Их произведение: $20{\cdot}15{\cdot}24 = 7200$.

Ответ: 7200.

2. Найдите все трёхзначные числа n, для которых выполнено равенство $n = 41{\cdot}S(n) + 16$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n. В ответе запишите найденные числа в порядке возрастания через запятую без пробелов.

Решение.

Пусть $n = 100a + 10b + c$, где a – число сотен, b – число десятков, c – число единиц. Тогда $a \in \{1, \dots, 9\},\ b, c \in \{0, \dots, 9\}$.

Из условия получаем $100a + 10b + c = 41(a + b + c) + 16$, то есть

$59a = 31b + 40c + 16$.

Правая часть должна делиться на 59. Переберём только цифру c. Получаем $31b = 59a - 40c - 16$, поэтому при каждом с значение b однозначно определяется остатком.

Проверка $c = 0, 1, \dots, 9$ даёт допустимые тройки цифр: $(2, 2, 1),\ (5, 9, 0),\ (9, 5, 9)$.

Следовательно, подходят числа $221,\ 590,\ 959$.

Ответ: $221,\ 590,\ 959$

3. В трёх коробках лежат $10,\ 14,$ и 22 камня. За один ход разрешается выбрать две коробки, вынуть из каждой по одному камню и положить эти два камня в третью коробку. Можно ли за несколько ходов получить $15,\ 15$ и 16 камней в коробках соответственно? Если можно – в ответе укажите количество ходов, если нет, то запишите в ответ 0.

Решение.

Рассмотрим остатки чисел камней в коробках по модулю 3. Один ход имеет вид: две выбранные коробки уменьшаются на 1, а третья увеличивается на 2. Но увеличение на 2 по модулю 3 – это то же самое, что уменьшение на 1. Значит за один ход все три остатка одновременно уменьшаются на 1 по модулю 3. Следовательно, разности остатков между коробками не меняются. Изначально остатки равны $10 \equiv 1,\ 14 \equiv 2,\ 22 \equiv 1$ по модулю 3. То есть две коробки имеют одинаковый остаток, а одна другой. В состоянии 15, 15, 16 остатки равны 0, 0, 1. Здесь тоже две коробки имеют одинаковый остаток, но важно, что одинаковыми стали первые две коробки, тогда как изначально одинаковыми были первая и третья. Поскольку коробки фиксированы, такая перестановка остатков невозможна.
Значит получить $15,\ 15,\ 16$ нельзя.

Ответ: 0.

4. В трёх шкатулках лежат камни. За один ход разрешается выбрать одну шкатулку и переложить из неё по одному камню в каждую из двух других шкатулок. То есть выбранная шкатулка теряет 2 камня, а две остальные получают по 1 камню.

Изначально в шкатулках лежало $36,\ 15$ и 3 камня. Можно ли за несколько ходов получить по 18 камней в каждой шкатулке?

Если можно, в ответе запишите наименьшее число ходов. Если нельзя – запишите 0.

Решение.

Всего камней $36 + 15 + 3 = 54$. Значит, если в трёх шкатулках станет поровну, то в каждой должно быть по 18 камней. Пусть всего сделано T ходов. Обозначим через x, y и z количество ходов, в которых выбирали соответственно первую, вторую и третью шкатулку. Тогда $x + y + z = T$. Если шкатулку выбирают, она теряет 2 камня. Если выбирают одну из двух других шкатулок, она получает 1 камень. Поэтому после всех ходов в первой шкатулке будет $36 - 2x + y + z = 36 + T - 3x$. Аналогично во второй и третьей шкатулках будет $15 + T - 3y$ и $3 + T - 3z$. Нужно получить $18,\ 18,\ 18$. Тогда

$36 + T - 3x = 18, \quad 15 + T - 3y = 18, \quad 3 + T - 3z = 18.$ Отсюда $x = \frac{T+18}{3},\ y = \frac{T-3}{3},\ z = \frac{T-15}{3}$. Так как x, y, z – количества ходов, они должны быть неотрицательными целыми числами. Из третьей формулы получаем $T \geq 15$. Кроме того, T должно делиться на 3. Значит, наименьшее возможное значение – $T = 15$.

Проверим, что 15 ходов действительно достаточно. При $T = 15$ получаем $x = 11,\ y = 4,\ z = 0$.

То есть можно 11 раз выбрать первую шкатулку, а затем 4 раза выбрать вторую.

После 11 ходов из первой шкатулки получим: (36, 15, 3) → (14, 26, 14).

После ещё 4 ходов из второй шкатулки получим: $(14,\ 26,\ 14) \to (18,\ 18,\ 18)$.

Значит, равенство получить можно, и минимальное число ходов равно 15.

Ответ: 15**.**

5. На клетчатой доске 8×8 нужно закрасить несколько клеток так, чтобы: 1) закрашенная фигура была связной по сторонам, 2) она касалась всех четырёх сторон доски, 3) среди всех таких фигур в ней было бы как можно меньше клеток. Сколько клеток нужно закрасить? Какой наименьший периметр может быть у такой фигуры? Ответы на вопросы дайте последовательно без пробелов.

Решение.

Чтобы фигура касалась левой и правой сторон, нужно провести цепочку клеток от левого края до правого. Для этого нужно не меньше 8 клеток: по одной в каждом столбце. Чтобы при этом коснуться ещё и верхней, и нижней сторон, нужно от этой цепочки дойти до верхнего и нижнего края. Самый выгодный способ добиться этого – провести вертикальную цепочку через один из столбцов, а горизонтальную цепочку через одну из строк. Понятно, что для этого нужно всего 15 клеточек. Меньше нельзя, потому что путь от левого края до правого требует не менее 8 клеток, а путь от верхнего края до нижнего требует не менее 8 клеток, но пути пересекутся в одной точке. Теперь посчитаем периметр – всего 15 клеточек, значит до закрашивания было бы 60 сторон, но в горизонтальной и вертикальной полосках по 7 соседств по стороне. Каждое соседство убирает по 2 стороны из внешнего периметра, значит итого: $60 - 2 \cdot 14 = 32$.

Ответ: 1532**.**

6. На кодовом замке стоят три колёсика с цифрами от 0 до 9. За один ход можно повернуть любые два колёсика на 1 вперёд: цифра 0 превращается в 1, 1 – в 2, ..., 8 – в 9, а 9 – снова в 0. Сначала на замке стоял код 000. Нужно получить код 357. Какое наименьшее число ходов для этого потребуется? В ответ напишите наименьшее возможное число ходов, если это можно сделать и 0 иначе.

Решение.

Пусть первое колёсико повернули всего на 3 шага, второе – на 5 шагов, третье – на 7 шагов. Именно такие остатки по модулю 10 должны получиться в конце. За один ход поворачиваются ровно два колёсика. Поэтому за T ходов суммарное число поворотов всех колёсиков равно $2T$. Если бы каждое колёсико поворачивалось только нужное число раз, суммарно было бы $3 + 5 + 7 = 15$ поворотов. Но 15 – нечётное число, а $2T$ всегда чётно. Значит, так не получится. Чтобы получить те же конечные цифры, каждое колёсико можно дополнительно повернуть на $10,\ 20,\ 30,\ ...$ шагов. Поэтому общее число поворотов должно иметь вид $15 + 10k$, где k – неотрицательное целое число. Наименьший вариант: $k = 1$. Тогда суммарно нужно сделать $15 + 10 = 25$ поворотов. Но за один ход делается 2 поворота, а 25 снова не делится на 2. Значит, добавлять 10 можно не к общей сумме, а к отдельным колёсикам. Искомые количества поворотов трёх колёсиков имеют вид $3 + 10a$, $5 + 10b$, $7 + 10c$, где a, b, c – неотрицательные целые числа. Их сумма равна $15 + 10(a + b + c)$. Это число всегда нечётное, потому что 15 нечётно, а $10(a + b + c)$ чётно. Но за каждый ход суммарное число поворотов увеличивается на 2, поэтому после любого числа ходов оно обязательно чётное. Получили противоречие. Значит, код 357 вообще невозможно получить из кода 000 такими ходами.

Ответ: 0.

7. Найдите все натуральные n, для которых число $7n + 5$ делит число $3n + 127$. В ответ укажите все возможные значения n в порядке возрастания без пробелов.

Решение.

Если $7n + 5$ делит $3n + 127$, то оно делит любую целую линейную комбинацию этих чисел.

Рассмотрим $7(3n + 127) - 3(7n + 5) = 21n + 889 - 21n - 15 = 874$.

Значит, $7n + 5$ – положительный делитель числа 874. Разложение: $874 = 2 \cdot 19 \cdot 23$.

Кроме того, $7n + 5$ должно быть больше 12 и давать остаток 5 при делении на 7. Среди делителей 874 этому условию подходит только 19.

Получаем $7n + 5 = 19$, откуда $n = 2$.

Ответ: 2

8. Код состоит из шести цифр от 0 до 9. Назовём его сбалансированным, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Сколько существует сбалансированных кодов, отличных от 000000?

Решение.

Посчитаем, сколько троек цифр имеют каждую возможную сумму от 0 до 27. Эти количества являются коэффициентами многочлена $(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^3$.

Получаем последовательность: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 63, 69, 73, 75, 75, 73, 69, 63, 55, 45, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1.

Чтобы шестизначный код был сбалансированным, левая и правая тройки должны иметь одну и ту же сумму. Поэтому всего количество кодов должно быть равно сумме квадратов этих чисел.

Эта сумма равна 55252. Код 000000 надо исключить.

Следовательно, остаётся 55251 код.

Ответ: 55251

9. Сколько существует слов длины 13, состоящих из 8 букв А и 5 букв Б, в которых нигде не встречаются три буквы Б подряд?

Решение.

Сначала расставим 8 букв А. Они образуют 9 промежутков: перед первой А, между соседними А и после последней А.

Чтобы не было трёх букв Б подряд, в каждый промежуток можно поставить не более двух букв Б.

Нужно распределить 5 одинаковых букв Б по 9 промежуткам, причём в каждом промежутке не больше 2 букв. Без ограничения сверху это можно сделать $C_{13}^{8} = 1287$ способами.

Вычтем плохие распределения, где в некотором промежутке стоит хотя бы 3 буквы Б. Выберем такой промежуток 9 способами, положим туда 3 буквы Б, оставшиеся 2 буквы распределим по 9 промежуткам: $C_{10}^{8} = 45$ способов.

Два промежутка одновременно не могут содержать по 3 буквы Б, потому что всего букв Б только 5. Значит, ответ $1287 - 9 \cdot 45 = 882$.

Ответ: 882

10. За круглым столом сидят 20 жителей острова. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Каждый житель сказал одну и ту же фразу: *«Среди трёх следующих за мной по часовой стрелке жителей ровно два рыцаря»*. Известно, что за столом есть хотя бы один рыцарь. Сколько рыцарей сидит за столом?

Решение.

Будем обозначать рыцаря буквой Р, а лжеца буквой Л. Фраза каждого жителя относится к трём следующим за ним людям. Если человек – рыцарь, то среди трёх следующих за ним действительно ровно два рыцаря. Если человек – лжец, то среди трёх следующих за ним не ровно два рыцаря. Посмотрим, как по трём подряд идущим жителям определяется следующий. Пусть три подряд идущих типа уже известны. Следующий тип должен быть таким, чтобы первый из этих трёх сказал правду, если он рыцарь, и соврал, если он лжец. Получаем такую таблицу переходов:

Три подряд	Следующий	Комментарий
ЛЛЛ	Л или Р	если дальше появится Р, возникнет невозможный фрагмент
ЛЛР	Л	
ЛРЛ	Л	
ЛРР	Р	
РЛЛ	невозможно	у рыцаря среди следующих трёх не может быть не два рыцаря
РЛР	Р	
РРЛ	Р	
РРР	Л	

Фрагмент РЛЛ невозможен сразу. Фрагменты ЛЛР и ЛРЛ после одного-двух шагов приводят к РЛЛ, значит они тоже не могут встречаться в круговой рассадке.

Если где-то встретились три лжеца подряд, то по таблице следующий может быть лжецом или рыцарем. Если когда-нибудь после такой цепочки появится рыцарь, снова получится запрещённый фрагмент. Поэтому вариант с ЛЛЛ возможен только тогда, когда все жители – лжецы. Но по условию хотя бы один рыцарь есть, значит ЛЛЛ тоже не встречается.

Остаются только четыре допустимых тройки: ЛРР, РРР, РРЛ, РЛР. По таблице они переходят друг в друга строго по циклу: ЛРР $\rightarrow$ РРР $\rightarrow$ РРЛ $\rightarrow$ РЛР $\rightarrow$ ЛРР. Значит вся рассадка по кругу вынужденно состоит из повторяющегося блока ЛРРР, с точностью до поворота стола. В каждом таком блоке из четырёх человек сидят один лжец и три рыцаря. Всего жителей 20, а $20 = 5 \cdot 4$. Поэтому таких блоков пять. Следовательно, число рыцарей равно $5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.

11. На доске написаны числа $2, 5, 8, 11, \ldots, 35$ – всего 12 чисел арифметической прогрессии. Нужно выбрать несколько чисел так, чтобы никакие два выбранных числа не были соседними в этой записи. Какое наибольшее возможное значение суммы выбранных чисел?

Решение.

Разобьём 12 мест на пары соседних мест: $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,8)$, $(9,10)$, $(11,12)$. Из каждой такой пары можно выбрать не более одного числа, иначе были бы выбраны соседние числа.
В каждой паре большее число стоит на чётном месте. Поэтому вклад выбранных чисел из пары не может превышать вклад числа на чётном месте этой пары. Значит вся сумма не может быть больше суммы чисел на чётных местах.
Числа на чётных местах: $5, 11, 17, 23, 29, 35$. Их сумма равна

$5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 = 120$. Эта сумма достижима: выбираем все числа на чётных местах, и никакие два из них не соседние. Значит максимум равен 120.

Ответ: 120.

12. Сколько натуральных делителей числа $N = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2$ являются кратными 180, но не являются кратными 2520?

Решение.

Запишем делитель в виде $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, где $0 \le a \le 6$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 4$, $0 \le d \le 2$.

Кратность $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ означает: $a \ge 2$, $b \ge 2$, $c \ge 1$. Тогда a можно выбрать 5 способами, b – 4 способами, c – 4 способами, d – 3 способами. Всего $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ делителей.

Теперь вычтем те из них, которые кратны $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Для них дополнительно $a \ge 3$ и $d \ge 1$.

Таких делителей $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128$.

Следовательно, искомое количество равно $240 - 128 = 112$.

Ответ: 112

13. Сколько существует последовательностей из 12 нулей и единиц, в которых ровно пять единиц и нигде не встречаются три нуля подряд?

Решение.

Поставим сначала пять единиц. Они образуют шесть промежутков для нулей: до первой единицы, между соседними единицами и после последней единицы.

Всего нужно распределить семь нулей по шести промежуткам, причём в каждом промежутке не больше двух нулей.

Без ограничения сверху число распределений равно $C_{12}^5 = 792$.

Вычтем распределения, где в некотором промежутке хотя бы три нуля. Выбираем такой промежуток 6 способами, убираем из него 3 нуля, оставшиеся 4 нуля распределяем по 6 промежуткам: $C_9^5 = 126$ способов.

Если два промежутка имеют хотя бы по три нуля, то после удаления по три нуля остаётся 1 ноль, который можно распределить $C_6^5 = 6$ способами; пар промежутков $C_6^2 = 15$.

По включениям-исключениям получаем $792 - 6 \cdot 126 + 15 \cdot 6 = 126$.

Ответ: 126

14. В коробке лежат карточки с числами от 1 до 50. Какое наименьшее количество карточек нужно взять, чтобы среди выбранных обязательно нашлись две карточки, сумма чисел на которых равна 51.

Решение.

Разобьём все карточки на пары с суммой 51: $(1, 50)$, $(2, 49)$, …, $(25, 26)$.
Всего получилось 25 пар. Если взять по одной карточке из каждой пары, можно выбрать 25 карточек и не получить пары с суммой 51. Значит 25 карточек недостаточно.
Если же взять 26 карточек, то по принципу Дирихле две из них обязательно попадут в одну и ту же пару. Их сумма будет равна 51. Значит минимальное количество карточек равно 26.

Ответ: 26.

15. На складе лежат коробки трёх видов: A, B и C. Всего коробок меньше 200. Известно, что коробок A ровно $\frac{2}{7}$ от общего числа, а коробок B ровно $\frac{3}{5}$ от числа коробок, не являющихся A. После того как 21 коробку C увезли, коробок B стало ровно $\frac{4}{7}$ от оставшегося числа коробок. Сколько коробок было на складе сначала?

Решение.

Пусть всего было N коробок. Тогда $A = \frac{2N}{7}$, значит N кратно 7.

Не А составляет $\frac{5N}{7}$. Коробок B равно $\frac{3}{5}$ от этого числа, то есть $B = \frac{3N}{7}$.

Тогда $C = N - \frac{2N}{7} - \frac{3N}{7} = \frac{2N}{7}$.

После вывоза 21 коробки C всего осталось $N - 21$ коробка, а число коробок B не изменилось и равно $\frac{3N}{7}$.

По условию $\frac{3N}{7} = \frac{4(N-21)}{7}$. Умножаем на 7: $3N = 4N - 84$, откуда $N = 84$.

Проверка: $A = 24,\ B = 36,\ C = 24$. После вывоза 21 коробки C остаётся 63 коробки, и $B = 36$ действительно составляет $\frac{4}{7}$ от 63.

Ответ: 84

16. У куба 8 вершин. Каждую вершину нужно покрасить в чёрный или белый цвет так, чтобы на каждой грани куба было чётное число чёрных вершин. Сколько существует таких раскрасок?

Решение.

Будем обозначать чёрный цвет числом 1, а белый – числом 0. Условие задачи означает, что сумма цветов четырёх вершин каждой грани должна быть чётной.
Пусть цвета нижней грани идут по кругу и равны $a,\ b,\ c,\ d$. На нижней грани должно быть чётное число чёрных вершин, поэтому для нижней грани есть 8 вариантов раскраски.
Теперь выберем цвет одной верхней вершины, например A. Это можно сделать 2 способами. После этого условия чётности на трёх боковых гранях однозначно определяют остальные верхние вершины $B,\ C$ и D: каждая боковая грань уже содержит две нижние вершины и одну известную верхнюю, поэтому четвёртая вершина определяется однозначно.
Оставшаяся четвёртая боковая грань автоматически будет иметь чётное число чёрных вершин, потому что сумма условий по всем четырём боковым граням содержит каждую верхнюю и нижнюю вершину ровно два раза. Верхняя грань тоже автоматически получится чётной из-за чётности нижней грани.
Итак, всего $8 \cdot 2 = 16$ раскрасок.

Ответ: 16.