Летний математический турнир АПО, любители
22 августа 2026
Решения

1. В корзине лежали яблоки. Сначала из неё взяли половину всех яблок и ещё 3 яблока, а потом половину остатка и ещё 3 яблока. После этого в корзине осталось 4 яблока. Сколько яблок было в корзине сначала?

Решение.

Пойдём с конца. Во второй раз взяли половину яблок и ещё 3, а осталось 4. Значит, до того, как взяли последние 3 яблока, в корзине было $4 + 3 = 7$ яблок – а это ровно половина того, что лежало в корзине перед вторым разом. Поэтому перед вторым разом было $7 \cdot 2 = 14$ яблок.

Точно так же разбираем первый раз: $14 + 3 = 17$ яблок – это половина начального количества, значит, сначала в корзине было $17 \cdot 2 = 34$ яблока.

Проверка: из 34 взяли 17 и ещё 3 – осталось 14; из 14 взяли 7 и ещё 3 – осталось 4.

Ответ: 34.

2. У квадратного листа бумаги со стороной 10 см вырезали в каждом из четырёх углов квадратик со стороной 2 см. Найдите периметр получившейся фигуры в сантиметрах (одним числом без единиц измерения).

Решение.

Посмотрим, что происходит с границей фигуры, когда вырезают один угловой квадратик. Из границы пропадают два отрезка по 2 см – кусочки сторон исходного квадрата, – но появляются два новых отрезка по 2 см: стороны выреза. Длина границы при этом не меняется.

То же самое происходит с каждым из четырёх углов, поэтому периметр остался таким же, как у исходного квадрата: $4 \cdot 10 = 40$ см.

Ответ: 40.

3. Найдите сумму всех натуральных чисел n, при которых значение дроби $\frac{n+25}{n+3}$ – целое число.

Решение.

Заметим, что $n + 25 = (n + 3) + 22$.

Первое слагаемое делится на $n + 3$, поэтому вся сумма делится на $n + 3$ в точности тогда, когда на $n + 3$ делится число 22.

Так как n натуральное, $n + 3 \geq 4$, поэтому среди делителей 22 подходят только 11 и 22, то есть n равно 8 или 19. Проверка: $\frac{33}{11} = 3$ и $\frac{44}{22} = 2$. Сумма найденных чисел равна 27.

Ответ: 27.

4. На доске написано число 2026. Разрешается вычеркнуть из него две цифры, а оставшиеся сдвинуть, не меняя их порядка. Сколько различных чисел можно так получить?

Решение.

Вычеркнуть две цифры из четырёх – это то же самое, что выбрать, какие две цифры останутся. Сделать это можно шестью способами.

Выпишем, что получается в каждом случае: остаются первая и вторая цифры – 20; первая и третья – 22; первая и четвёртая – 26; вторая и третья – 02; вторая и четвёртая – 06; третья и четвёртая – 26.

Записи 02 и 06 – это числа 2 и 6. Кроме того, число 26 получилось дважды.

Значит, различных чисел ровно пять: 2, 6, 20, 22 и 26.
Ответ: 5.

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 24 и имеет ровно 15 различных натуральных делителей.

Решение.

Если разложение числа на простые множители имеет вид $p^a \cdot q^b \cdot \ldots$, то количество его делителей равно $(a+1)(b+1)\ldots$ – каждый делитель получается независимым выбором показателей.
Значит, нужно представить 15 в виде такого произведения: либо 15, либо $3 \cdot 5$. В первом случае число является 14-й степенью простого и не может делиться сразу и на 2, и на 3.
Во втором случае число имеет вид $p^2 \cdot q^4$. Так как оно кратно $24 = 2^3 \cdot 3$, показатель двойки не меньше трёх, поэтому двойка входит в четвёртой степени, а тройка – во второй.
Получаем $2^4 \cdot 3^2 = 144$. Проверка: у числа 144 ровно $5 \cdot 3 = 15$ делителей и $144 = 24 \cdot 6$.
Ответ: 144.

6. Из книги выпал кусок. Номер первой выпавшей страницы равен 187, а номер последней записан теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов выпало из книги?

Решение.

На одном листе книги две страницы: с одной стороны нечётная, с другой – следующая за ней чётная. Выпадают целые листы, поэтому первая выпавшая страница нечётная (номер 187 – нечётный, всё сходится), а последняя обязательно чётная.
Номер последней страницы записан теми же цифрами 1, 8 и 7. Выпишем все числа, которые из них получаются: 178, 187, 718, 781, 817, 871. Нам нужно число больше 187 и при этом чётное – такое среди них ровно одно: 718.
Значит, выпали страницы со 187-й по 718-ю, а всего их 718–187+1=532. На каждом листе по две страницы, поэтому листов выпало 532:2=266.
Ответ: 266.

7. Сколько раз за сутки угол между часовой и минутной стрелками башенных часов равен ровно 100°?

Решение.

Минутная стрелка проходит 6° в минуту, часовая – 0,5° в минуту, поэтому минутная «убегает» от часовой со скоростью $6 - 0,5 = 5,5$ градуса в минуту.
За сутки, то есть за 1440 минут, минутная стрелка обгонит часовую на $5,5 \cdot 1440 = 7920$ градусов, что составляет ровно $7920 : 360 = 22$ полных оборота.
Отсчитаем отставание минутной стрелки от очередного совпадения стрелок. За один такой оборот это отставание один раз проходит значение 100° и один раз значение 260°, а угол между стрелками в обоих случаях равен 100° (во втором случае $360° - 260° = 100°$).
Значит, за каждый оборот нужный угол получается дважды, а всего за сутки – $22 \cdot 2 = 44$ раза.
Ответ: 44.

8. Назовём натуральное число удачным, если оно ровно в 31 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от единицы и от самого числа. Сколько существует удачных чисел?

Решение.

Наименьший такой делитель всегда прост: если бы он раскладывался на множители, нашёлся бы делитель поменьше. Обозначим его через p; по условию само число равно $31p$.

Число $31p$ делится и на 31, и на p. Чтобы наименьшим простым делителем оказалось именно p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $p \leq 31$.

Значит, p – любое простое число, не превосходящее 31: это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31 – всего одиннадцать значений. Им отвечают числа 62, 93, 155, 217, 341, 403, 527, 589, 713, 899 и 961.

При $p > 31$ наименьшим простым делителем числа $31p$ было бы 31, а не p, поэтому других чисел нет.

Ответ: 11.

9. Сколькими способами число 945 можно представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел?

Решение.

Пусть слагаемых $k \geq 2$, первое из них равно $a \geq 1$, а последнее – $a + k - 1$. Сумма нескольких подряд идущих чисел равна полусумме крайних, умноженной на их количество, то есть $\frac{(a+(a+k-1))\cdot k}{2} = 945$.

Умножив на 2, получаем $k(2a + k - 1) = 1890$.

Обозначим $m = 2a + k - 1$. Числа k и m дают в сумме $2a + 2k - 1$ – нечётное число, поэтому одно из них чётно, а другое нечётно. Кроме того, $m = k + 2a - 1 > k$, поскольку $a \geq 1$.

Так как $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ и двойка входит в разложение только в первой степени, в любом разложении $1890 = km$ ровно один множитель чётный – условие на чётность выполняется само собой.

У числа 1890 ровно $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ делителя, и они разбиваются на 16 пар $(k; m)$ с $k < m$ (полным квадратом 1890 не является). Пара $k = 1$ не подходит, так как слагаемых должно быть не меньше двух. Остальные 15 пар дают ровно 15 представлений, например $945 = 472 + 473$.

Ответ: 15.

10. Найдите наибольшее четырёхзначное число, у которого все цифры различны, и каждая из его цифр делит это число.

Решение.

Нуля среди цифр быть не может, поэтому все цифры различны и лежат от 1 до 9.

Покажем, что искомое число начинается с цифр 9 и 8. Начала 99 быть не может: цифры различны. Значит, наибольшее возможное начало – 98, и мы сначала проверим, есть ли подходящее число с таким началом.

Такое число делится на 9, поэтому сумма его цифр кратна 9; и делится на 8, поэтому три его последние цифры образуют число, кратное 8. Обозначим третью и четвёртую цифры через c и d. Сумма $9 + 8 + c + d = 17 + c + d$ кратна 9, то есть $c + d$ равно 1 или 10: цифры c и d различны и отличны от нуля, от 8 и от 9, поэтому $c + d \geq 1 + 2 = 3$ и $c + d \leq 7 + 6 = 13$. Остаётся единственная возможность $c + d = 10$.

Три последние цифры образуют число $800 + 10c + d$, поэтому нужно, чтобы $10c + d$ делилось на 8. Перебираем пары от большей третьей цифры к меньшей: пара $(7; 3)$ даёт 73 – не делится; пара $(6; 4)$ даёт 64 – делится.

Значит, наибольшее подходящее число – 9864. Проверка: $9864 = 9 \cdot 1096 = 8 \cdot 1233 = 6 \cdot 1644 = 4 \cdot 2466$.

Ответ: 9864.

11. Какое наименьшее число клеток нужно отметить в квадрате 9×9 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 из соседних клеток была хотя бы одна отмеченная?

Решение.

Оценка. Выделим 16 не пересекающихся квадратов 2×2: их левые верхние клетки стоят в строках 1, 3, 5, 7 и столбцах 1, 3, 5, 7. В каждом из них должна быть отмеченная клетка, а так как они не пересекаются, отмеченных клеток не меньше 16.

Пример. Отметим все клетки, у которых и номер строки, и номер столбца чётны, – таких клеток $4 \cdot 4 = 16$.

Любой квадрат 2×2 занимает две соседние строки и два соседних столбца, причём их номера не превосходят 9. Среди двух соседних номеров один обязательно чётный, поэтому такой квадрат содержит клетку с чётными номерами строки и столбца, то есть отмеченную.

Ответ: 16.

12. Из чисел 1, 2, 3, …, 50 нужно выбрать как можно больше чисел так, чтобы ни одно выбранное число не было ровно вдвое больше другого выбранного. Сколько чисел удастся выбрать?

Решение.

Разложим все числа по цепочкам, в которых каждое следующее вдвое больше предыдущего. Цепочка начинается с нечётного числа: 1, 2, 4, 8, 16, 32; затем 3, 6, 12, 24, 48; затем 5, 10, 20, 40; затем 7, 14, 28; 9, 18, 36; 11, 22, 44; далее семь цепочек из двух чисел (13 и 26, 15 и 30, 17 и 34, 19 и 38, 21 и 42, 23 и 46, 25 и 50) и, наконец, двенадцать цепочек из одного числа (27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49).

Условие запрещает брать в одной цепочке два числа, стоящие рядом. Поэтому из цепочки в шесть чисел можно взять не больше трёх, из цепочки в пять – тоже не больше трёх, из цепочки в четыре – не больше двух, из цепочки в три – не больше двух, из цепочки в два – одно, из цепочки в одно – одно.

Складываем: $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 7 + 12 = 33$ числа.

Ровно 33 числа выбрать можно: в каждой цепочке берём числа через одно, начиная с первого. Например, из первой цепочки берём 1, 4 и 16.

Ответ: 33.

13. Числа 1, 2, 3, …, 8 выписывают в ряд в некотором порядке так, что каждое число, кроме самого первого, отличается ровно на 1 от какого-нибудь из чисел, стоящих левее него. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Покажем, что в любой момент уже выписанные числа образуют «отрезок» подряд идущих чисел. В самом деле, в начале выписано одно число – это отрезок. А каждое следующее число отличается на 1 от какого-то из уже выписанных, но при этом само ещё не выписано, поэтому оно может примыкать к отрезку только слева или справа, снова давая отрезок.

В конце выписаны все числа от 1 до 8. Будем теперь читать ряд справа налево. Последнее число – это то, что было добавлено к отрезку из семи чисел, значит, оно является одним из двух концов отрезка 1, 2, …, 8, то есть равно 1 или 8: два варианта.

После его удаления снова остаётся отрезок подряд идущих чисел, и предыдущее число – снова один из двух его концов: опять два варианта. Так продолжаем, пока не останется одно число, для которого выбора уже нет.

Выборов сделано семь, каждый раз по два варианта, и разные наборы выборов дают разные ряды. Значит, всего рядов $2^7 = 128$.

Ответ: 128.

14. В турнире по гандболу участвовали 30 команд, среди них «Вихрь» и «Заря». Каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу; за победу команда получает 3 очка, при ничьей обе команды получают по 1 очку, за поражение – 0. По итогам турнира «Вихрь» набрал 85 очков, а «Заря» все свои матчи свела вничью. Какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место?

Решение.

Каждая команда сыграла по 29 матчей. «Заря» все их свела вничью и набрала 29 очков.

С «Зарёй» вничью сыграл и «Вихрь», поэтому он мог набрать не больше $3 \cdot 28 + 1 = 85$ очков. Раз у него ровно 85, он выиграл все остальные 28 матчей.

Возьмём любую команду, кроме «Зари» и «Вихря». Она проиграла «Вихрю» и сыграла вничью с «Зарёй», поэтому у неё не больше $3 \cdot 27 + 1 = 82$ очков.

Значение 82 достижимо: пусть команда «Гроза» выиграла все свои матчи, кроме проигрыша «Вихрю» и ничьей с «Зарёй». Тогда у «Грозы» ровно 82 очка, и она вторая – больше очков только у «Вихря», а у «Зари» всего 29.

Ответ: 82.

15. По кругу стоят 14 роботов. Каждый из них либо исправен и всегда говорит правду, либо сломан и всегда лжёт. Каждый робот произнёс: «Оба моих соседа сломаны». Сколько сломанных роботов может быть в этом круге? В ответе запишите сумму всех возможных значений.

Решение.

Если робот исправен, то его слова верны и оба соседа действительно сломаны. Значит, два исправных робота не стоят рядом.

Если робот сломан, то его слова ложны, то есть хотя бы один сосед исправен. Поэтому три сломанных робота подряд стоять не могут: у среднего из них оба соседа оказались бы сломаны, и он сказал бы правду.

Итак, между двумя соседними исправными роботами стоят один или два сломанных, то есть расстояния между соседними исправными роботами равны 2 или 3, а в сумме эти расстояния дают 14. Разложений числа 14 на слагаемые, равные 2 и 3, ровно три: $14 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2$ (пять исправных), $14 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2$ (шесть исправных) и $14 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (семь исправных). Каждое легко осуществить.

Значит, сломанных роботов может быть 9, 8 или 7, а сумма этих значений равна 24.

Ответ: 24.

16. По кругу разложены 10 фонариков, все они выключены. За один ход разрешается переключить любые три подряд лежащих фонарика: каждый из них меняет своё состояние на противоположное. Какое наименьшее число ходов нужно, чтобы все 10 фонариков горели?

Решение.

Занумеруем места по кругу числами от 1 до 10. Через a_i обозначим, сколько раз переключалась тройка, начинающаяся на i-м месте. Важна лишь чётность каждого числа a_i: переключив одну и ту же тройку дважды, мы ничего не изменим.

Фонарик на месте j переключается в ходах трёх видов – начинающихся на местах $j-2$, $j-1$ и j. Чтобы он в итоге горел, сумма $a_{j-2}+a_{j-1}+a_j$ должна быть нечётной.

Запишем это условие для соседних фонариков j и $j+1$: суммы $a_{j-2}+a_{j-1}+a_j$ и $a_{j-1}+a_j+a_{j+1}$ обе нечётны. Значит, числа a_{j-2} и a_{j+1} одной чётности: при сдвиге на три места чётность не меняется.

Обходя круг шагами по три места, мы побываем на всех десяти местах, ведь числа 3 и 10 взаимно просты. Поэтому все числа a_i одной чётности. Если бы все они были чётными, то и сумма любых трёх была бы чётной, чего быть не может. Значит, все a_i нечётны, то есть каждая из десяти троек использовалась хотя бы раз, и ходов не меньше десяти.

Десяти ходов хватает: переключим по одному разу каждую из десяти троек. Тогда каждый фонарик переключится ровно три раза и загорится.

Ответ: 10.