Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».

Лига «Профессионалы» *7 класс.* Решения.

22 февраля 2025 года.

1. Кондуктор оторвал из катушки несколько билетов с последовательными шестизначными номерами. Оказалось, что доля оторванных билетов, в которых есть цифра 3, среди всех оторванных равна 1/12. Какое наибольшее число билетов мог оторвать кондуктор? (**48. Пусть k - число билетов, в которых есть цифра 3. Тогда общее число оторванных билетов равно 12k. Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий тройку на конце. Значит, 12k<10(k+1), откуда 2k<10, k<5. При k=4 искомый набор номеров существует, например 100 044, 100 045, 100 046, …, 100 091.)**

2. Винтик написал на доске натуральное число, а затем поделил с остатком на 111. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 400. Затем Шпунтик тоже поделил поделил исходное число с остатком, но на 777. Сумма неполного частного и остатка оказалась равна 400. Какое число мог изначально написать Винтик? Найдите все возможные варианты. В ответе укажите сумму всех найденных вариантов. (**43080. Обозначим загаданное число за n. Поделим его с остатком на 111 и 777: n = 111k + (400-k) = 777l + (400-l). Преобразуем равенство и получим: 110k = 776l. Разделим обе части на 2, 55k = 388l. Числа 55 и 388 взаимно просты, следовательно 388 | k и при этом 0 ≤ k ≤ 400. Также число (400 - k) должно быть остатком при делении на 111, поэтому 0 ≤ 400 - k ≤ 110. Под указанные ограничения подходят только решения с k = 388. В первом случае получаем, n = 111 * 388 + 12 = 43080.)**

3. Сколькими способами можно разменять 2025 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей? (**205842. Количество 5-рублёвых монет может быть любым целым числом от 0 до 405. После этого количество 1-рублёвок определяется однозначно, если выбрать некоторое количество 2-рублёвых монет. Тогда все количество способов равно сумме из 406 слагаемых 1013 + 1011 + 1008 + 1006 + 1003 +…+ 3 + 1 = 1014 * 203 = 205842.)**

4. В зоомагазине 3 амадины стоят как 5 попугаев и 2 канарейки, 8 попугаев — как 1 канарейка и 3 амадина. Сколько амадин стоят как 14 канареек? (**6. Введём валюту попугаепиастр. Пусть цена попугая — 1 попугаепиастр, амадины — А попугаепиастров, канарейки — К попугаеписатров. Составим систему уравнений в попугаепиастрах: 3А=5+2К, 8=1К+3А. Приравнивая 5+2К = 3А = 8-1К, получим К = 1, А = 7/3. Тогда 14 канареек стоят 14 попугаепиастров, за которые можно купить 14:(7/3)=6 амадин.)**

5. Николай хочет расставить на доске 6 х 7 максимально возможное количество не бьющих друг друга шахматных королей. Сколькими способами он может это сделать? (Король бьёт все соседние клетки, в том числе по диагонали). (**256. Всё поле разбивается на 9 квадратов 2х2 и 3 доминошки (справа). В каждую зону можно поставить максимум одного короля. Значит, королей максимум 12, и в каждой зоне примера на 12 будет стоять ровно 1 король. В правый ряд из 3-х доминошек королей можно поставить 4-ю способами. Эти короли влияют на следующие 2 вертикали слева, правая из которых должна оказаться пустой, а в левой вертикали, разбитой на 3 доминошки, 3-х королей можно также поставить 4-мя способами. Рассуждая далее аналогично, получим по правилу произведения в комбинаторике всего 4^4=256 способов.)**

6. Два велосипедиста едут по круговой дорожке в одном направлении. Первый обгоняет второго каждые 5 минут. Когда они начали ехать в противоположных направлениях, встречи стали происходить каждые 3 минуты. Во сколько раз скорость первого велосипедиста больше скорости второго? (**4. Пусть v1 и v2 — скорости велосипедистов (v1 > v2). Длина круга L есть скорость сближения велосипедистов умножить на время между встречами, поэтому 3(v1 + v2) = L = 5(v1 - v2), откуда 8v2 = 2v1, т.е. v1 = 4v2.)**

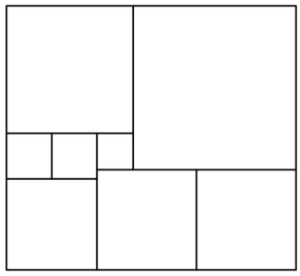
7. Из единичных кубиков составлен кубик размером 5x5x5. Какое наибольшее число кубиков можно из него удалить так, чтобы при взгляде на оставшуюся фигуру вдоль любого ребра был виден квадрат размером 5x5 без просветов? (**100. С одного направления надо видеть 25 кубиков, значит, убрать можно не более 100 кубиков. Приведем пример, как оставить ровно 25 кубиков. Раскрасим квадрат 5x5 в 5 цветов по диагоналям, тогда номер цвета клетки показывает, в каком слое должен находиться соответствующий единичный кубик в столбце, если смотреть на большой куб, например, сверху.)**

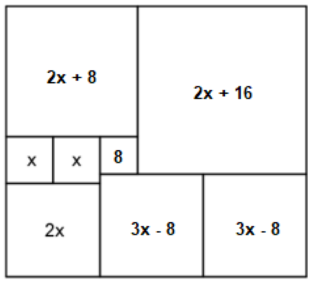
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

8. Сумму двух трехзначных натуральных чисел поделили на модуль их разности. Получилось четное число. Какое наибольшее значение оно могло принимать? (**998. Модуль разности не может равняться 1, так как иначе получаются числа разной четности и отношение не может быть равным четному числу. Следовательно, делили максимум 999+997 на минимум 2, т.е. наибольшее значение отношения равно 998.)**

9. В курсе по комбинаторике 26 модулей. Все модули содержат разное количество задач: от 1 до 26. Известно, что задачи в каждом модуле пронумерованы по порядку, в курсе предусмотрена сплошная нумерация задач между модулями, а первая задача первого модуля имеет номер 1. Например, если в первом модуле 5 задач, во втором — 9, а в третьем — 4, то в первом модуле задачи 1–5, во втором — 6–14, в третьем — 15–18. Какое наименьшее количество модулей в курсе может начинаться с задачи с нечётным номером? (**7. Заметим, что если в некотором модуле нечётное число задач, то либо этот модуль, либо следующий за ним начинается с задачи с нечётным номером. Кроме того первый модуль обязательно начинается с задачи с нечётным номером. Пусть есть хотя бы 20 модулей, которые начинаются с задачи с чётным номером. Тогда есть минимум 7 модулей с нечётным количеством задач, которые начинаются с задачи с чётным номером. Максимум один из них может быть последним модулем курса. Тогда после 6 модулей с нечётным числом задач идут 6 различных модулей, которые начинаются с задачи с нечётным номером. Также есть ещё самый первый модуль, поэтому модулей, которые начинаются с задачи с нечётным номером, хотя бы 7, но по предположению у нас максимум 6 таких модулей. Получаем противоречие. Тогда модулей, начинающихся с задачи с чётным номером, не более 19. Нам подойдёт такой пример: пусть первым идёт модуль с нечётным числом задач, потом идут все модули с чётным числом задач, а после них оставшиеся двенадцать модулей с нечётным числом задач. Тогда первый, шестнадцатый, восемнадцатый, двадцатый, двадцать второй, двадцать четвертый и двадцать шестой модули будут начинаться с задачи с нечётным номером.)**

10. Прямоугольник разрезан на 8 квадратов (см. рисунок). Сторона самого маленького центрального квадрата равна 8. Чему равна сторона самого большого? (**36. Обозначим сторону второго по величине квадрата за x и выразим стороны всех остальных. В центре каждого квадрата указаны длины их сторон. Из рисунка видно, что горизонтальная сторона прямоугольника с одной стороны равна 4x + 24, а другой стороны равна 8x - 16. Решая уравнение, находим x = 10, следовательно, длина стороны самого большого квадрата равна 2*10 + 16 = 36.)**





11. Сколько решений имеет ребус (разные буквы --- разные цифры): П * О * И * С * К = Р * Е * Ш * Е * Н * И * Й ? (**362880. В ребусе используются 10 букв, поэтому все цифры встречаются. В одной из частей равенства есть 0, поэтому он есть и с другой стороны. Получается, что решения существуют только при И=0, оставшиеся цифры можно распределить между 9 буквами 9!=362880 вариантами.)**

12. Найдите все двузначные числа, у которых четвёртая степень суммы цифр равна сумме цифр четвёртой степени самого числа. В ответе укажите произведение всех найденных чисел. (**110. Четвёртая степень двузначного числа меньше 100^4, т.е. содержит не более 8 знаков, а значит, ее сумма цифр не превышает 89=72. Тогда сумма цифр самого двузначного числа не более , а это либо 1, либо 2. Проверяя варианты чисел 10, 11, 20, находим два ответа – 10 и 11.)**

13. В треугольнике *ABC* сторона *AB* – наибольшая. На отрезке *AB* отложены отрезки *AK*=*AC* и *BM*=*BC*. Угол *MCK* равен 20°. Найдите угол *ACB* (в градусах). (**140°. Так как треугольники *ACK* и *BCM* равнобедренные, то $\angle ACB$ = 180° - ($\angle BAC$+$\angle CBA$) = 180° - (180° - 2$\angle AKC$ + 180° - 2$\angle CMB$) = 2($\angle AKC$+$\angle CMB$)-180° = 2(180°-$\angle MCK$) - 180° = 2(180°-20°)-180° = 140°.)**

14. Несколько (больше одного) теннистов провели между собой турнир в несколько кругов (в одном круге каждый с каждым сыграл по одному матчу). Во сколько кругов мог пройти этот турнир, если всего было сыграно 224 матча? В ответе укажите сумму всех возможных вариантов ответа. (**232. Пусть в К-круговом турнире участвовало А теннистостов, тогда они сыграли К*А*(А-1)/2 = 224 партии. Следовательно, К*А*(А-1) = 448 = 2^6 * 7.Так как либо К, либо А, либо А-1 делится на 7 и А, А-1 взаимно простые числа, то первый случай даёт К=224 (турнир среди двух шахматистов), второй случай невозможен, а третий случай даёт А=8 и К=8 (турнир среди восьми шахматистов))**

15. Назовём натуральное число интересным, если сумма любых трёх подряд идущих цифр в нём чётная. Напишите наибольшее интересное число из различных цифр. (**98756314. Заметим, что в интересном числе цифры, между которыми стоит ровно две цифры, одной чётности. Тогда цифры числа разбиваются на три группы одной чётности. Если в интересном числе хотя бы 9 цифр, то все группы имеют размер минимум 3. Отсюда по принципу Дирихле получаем, что чисел какой-то чётности хотя бы 3 + 3 = 6. Значит максимальная длина интересного числа 8 цифр. В интересном числе из 8 цифр будет по 2 группы из 3 цифр и одна группа из 2 цифр. Числа некоторой**

чётности будут представлены в группах размера 3 и 2. Тогда два числа данной чётности в сумме с числом другой чётности дают чётное число. Откуда получим, что в искомом числе 5 нечётных цифр и 3 чётных. Для максимальности цифры одной чётности расставим по убыванию. Причём самой первой будет цифра 9, а второй - 8.)

16. На острове Невезения живут 1000 жителей: 500 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 500 лгунов, которые всегда лгут. У каждого из жителей острова есть хотя бы один друг. Однажды жители острова встали в шеренгу. Первые 500 заявили: «Все мои друзья — рыцари», а остальные сказали: «Каждый мой друг — лгун». Какое наименьшее количество дружеских пар, состоящих из рыцаря и лгуна, может быть на острове? (Один и тот же житель острова может входить в несколько разных пар). **(250. Меньше 250 таких пар быть не может. Действительно, среди тех 500 аборигенов, кто сказал, что все их друзья — лгуны, есть или хотя бы 250 рыцарей, или по крайней мере 250 лгунов. В первом случае у каждого из 250 рыцарей действительно есть хотя бы по одному другу-лгуну, образующих с ними по крайней мере 250 пар. Во втором случае каждый из 250 лгунов имеет хотя бы одного друга-рыцаря, поскольку на самом деле не все его друзья является лгунами. И здесь есть не менее 250 пар. Количество пар может быть 250. Такой она будет, если, например, рыцарь 1 дружит с лгуном 1, рыцарь 2 дружит с лгуном 2, . . . , рыцарь 250 дружит с лгуном 250, рыцари 251–500 дружат между собой, лгуны 251–500 дружат между собой и больше никто ни с кем не дружит. В таком случае фразу «Каждый мой друг — лгун» скажут первые 250 рыцарей и первые 250 лгунов, а фразу «Каждый мой друг — рыцарь» — остальные жители.)**

17. Во всех клетках таблицы стоят нули. Знайка несколько раз выбирает квадрат 2×2 и увеличивает на 1 все числа, стоящие в нём. Какое число написано в центре таблицы (см. рисунок), если известны числа только в четырёх клетках исходной таблицы? **(9. Каждое число на середине стороны равно сумме двух чисел в соседних с ним угловых клетках, значит, число в левом верхнем углу равно $5 - 2 = 3$, число в правом верхнем углу равно $4 - 3 = 1$. Число в центре равно сумме всех угловых чисел, т. е. $3 + 1 + 2 + 3 = 9$.)**

*	4	*
5	*	*
2	*	3

18. У Незнайки есть 27 гирь с целыми массами от 1 до 27 кг (все гири весят разное число килограмм). Незнайка распределил гири на группы, в каждой из которых самая тяжёлая гиря уравновешивает все остальные гири этой группы. Чему может быть равно число групп? В ответе укажите произведение всех возможных вариантов. **(9. Так как все веса разные, то в группе не может быть 2 гири. Наибольшее число групп $27 : 3 = 9$. Ни в какой группе не может быть больше двух гирь, массы которых в кг равны от 14 до 27, тогда групп не менее $(27 - 14 + 1) : 2 + 1 = 8$. Пусть групп 8. Самые тяжёлые гири из групп по условию составляют половину массы всех гирь, их масса равна $27 \cdot 28 : 2 : 2 = 189$ кг. Но 8 самых тяжёлых гирь дают в сумме $20 + 21 + \cdot \cdot \cdot + 27 = 188$. Значит групп могло быть только 9; например, (1 8 9), (2 23 25), (3 21 24), (4 18 22), (5 15 20), (6 13 19), (7 10 17), (11 16 27), (12 14 26).)**

19. Даны натуральные числа x и y. Известно, что из следующих четырёх утверждений:

а) $x+1$ делится на y,

б) $x=2y+5$,
в) $x+y$ делится на 3,
г) $x+7y$ – простое число;
три верных, а одно – неверное. Найти все возможные пары чисел x и y. Найдите все возможные варианты. В каждом варианте посчитайте число $10x+y$. В ответе укажите произведение чисел $10x+y$ для всех вариантов. **(<u>16192</u>. Так как $x+7y = (x+y)+6y > 3$ и делится на 3, если $x+y$ делится на 3, то неверным является либо третье, либо четвёртое утверждения. Значит, первые два верны. Из первого следует, что $x+1 = yk$, где k – натуральное число. Из второго $yk = x+1 = 2y+6$, т.е. 6 делится на y. Проверяя варианты 1, 2, 3 и 6 для числа y, находим, что $x=9$, $y=2$ или $x=17$, $y=6$.)**

20. Какое наибольшее количество ромбиков из двух треугольников (см. картинку слева), можно вырезать по линиям треугольной сетки из шестиугольника на картинке справа? **(<u>21</u>. Используя шахматную раскраску получаем, что так как каждый ромб содержит чёрную клетку, значит ромбов не более 21. Пример на 21 ромб существует.)**