Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».

<u>Лига «Любители» *6 класс.*</u> <u>Решения</u>.

22 февраля 2025 года.

1. Винтик и Шпунтик считали станции метро на Очень Большой Кольцевой линии. Они сели на станции «Победная» в поезда, идущие в разные стороны. Станция "Победная" для каждого из братьев стала 1-й по счёту. Сколько станций на Очень Большой Кольцевой линии, если станция «Олимпийская» была 63-й по счёту у Винтика и 19-й у Шпунтика? **(<u>80</u>. Все станции, кроме «Победной» и «Олимпийской» были посчитаны по разу, а они дважды, поэтому ответ 63 + 19 - 2 = 80.)**

2. Винтик написал на доске натуральное число, а затем поделил с остатком на 111. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 400. Затем Шпунтик тоже поделил поделил исходное число с остатком, но на 777. Сумма неполного частного и остатка оказалась равна 400. Какое число мог изначально написать Винтик? Найдите все возможные варианты. В ответе укажите сумму всех найденных вариантов. **(<u>43080</u>. Обозначим загаданное число за n. Поделим его с остатком на 111 и 777: $n = 111k + (400-k) = 777l + (400-l)$. Преобразуем равенство и получим: $110k = 776l$. Разделим обе части на 2, $55k = 388l$. Числа 55 и 388 взаимно просты, следовательно $388 \mid k$ и при этом $0 \leq k \leq 400$. Также число $(400 - k)$ должно быть остатком при делении на 111, поэтому $0 \leq 400 - k \leq 110$. Под указанные ограничения подходят только решения с $k = 388$. В первом случае получаем, $n = 111 * 388 + 12 = 43080$.)**

3. Сколькими способами можно разменять 2025 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей? **(<u>205842</u>. Количество 5-рублёвых монет может быть любым целым числом от 0 до 2025/5 = 405. После этого количество 1-рублёвок определяется однозначно, если выбрать некоторое количество 2-рублёвых монет. Тогда все количество способов равно сумме из 406 слагаемых 1013 + 1011 + 1008 + 1006 + 1003 +…+ 3 + 1 = 1014 * 203 = 205842.)**

4. В зоомагазине 3 амадины стоят как 5 попугаев и 2 канарейки, 8 попугаев — как 1 канарейка и 3 амадина. Сколько амадин стоят как 14 канареек? **(<u>6</u>. Введём валюту попугаепиастр. Пусть цена попугая — 1 попугаепиастр, амадины — А попугаепиастров, канарейки — К попугаеписатров. Составим систему уравнений в попугаепиастрах: 3А=5+2К, 8=1К+3А. Приравнивая 5+2К = 3А = 8-1К, получим К = 1, А = 7/3. Тогда 14 канареек стоят 14 попугаепиастров, за которые можно купить 14:(7/3)=6 амадин.)**

5. Найдите наименьшее количество видов цифр, которое нужно для записи 6 двузначных чисел с разными остатками от деления на 6. (Например, для записи чисел 12 и 24 нужно всего 3 вида цифр) **(<u>3</u>. Из двух видов цифр можно составить максимум 4 двузначных числа. Пример на 3 цифры строится просто: 12 (ост. 0), 21 (ост. 3), 22 (ост. 4), 23 (ост. 5), 31 (ост. 1), 32 (ост. 2).)**

6. Два велосипедиста едут по круговой дорожке в одном направлении. Первый обгоняет второго каждые 5 минут. Когда они начали ехать в противоположных направлениях, встречи стали происходить каждые 3 минуты. Во сколько раз скорость первого велосипедиста больше скорости второго? **(<u>4</u>. Пусть v1 и v2 — скорости велосипедистов (v1 > v2). Длина круга L есть скорость сближения велосипедистов умножить на время между встречами, поэтому 3(v1 + v2) = L = 5(v1 - v2), откуда 8v2 = 2v1, т.е. v1 = 4v2.)**

7. Из единичных кубиков составлен кубик размером 5х5х5. Какое наибольшее число кубиков можно из него удалить так, чтобы при взгляде на оставшуюся фигуру вдоль любого ребра был виден квадрат размером 5х5 без просветов? (**100. С одного направления надо видеть 25 кубиков, значит, убрать можно не более 100 кубиков. Приведем пример, как оставить ровно 25 кубиков. Раскрасим квадрат 55 в 5 цветов по диагоналям, тогда номер цвета клетки показывает, в каком слое должен находиться соответствующий единичный кубик в столбце, если смотреть на большой куб, например, сверху.)**

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

8. Сумму двух трехзначных натуральных чисел поделили на модуль их разности. Получилось четное число. Какое наибольшее значение оно могло принимать? (**998. Модуль разности не может равняться 1, так как иначе получаются числа разной четности и отношение не может быть равным четному числу. Следовательно, делили максимум 999+997 на минимум 2, т.е. наибольшее значение отношения равно 998.)**

9. В курсе по комбинаторике 26 модулей. Все модули содержат разное количество задач: от 1 до 26. Известно, что задачи в каждом модуле пронумерованы по порядку, в курсе предусмотрена сплошная нумерация задач между модулями, а первая задача первого модуля имеет номер 1. Например, если в первом модуле 5 задач, во втором — 9, а в третьем — 4, то в первом модуле задачи 1–5, во втором — 6–14, в третьем — 15–18. Какое наименьшее количество модулей в курсе может начинаться с задачи с нечётным номером? (**7. Заметим, что если в некотором модуле нечётное число задач, то либо этот модуль, либо следующий за ним начинается с задачи с нечётным номером. Кроме того первый модуль обязательно начинается с задачи с нечётным номером. Пусть есть хотя бы 20 модулей, которые начинаются с задачи с чётным номером. Тогда есть минимум 7 модулей с нечётным количеством задач, которые начинаются с задачи с чётным номером. Максимум один из них может быть последним модулем курса. Тогда после 6 модулей с нечётным числом задач идут 6 различных модулей, которые начинаются с задачи с нечётным номером. Также есть ещё самый первый модуль, поэтому модулей, которые начинаются с задачи с нечётным номером, хотя бы 7, но по предположению у нас максимум 6 таких модулей. Получаем противоречие. Тогда модулей, начинающихся с задачи с чётным номером, не более 19. Нам подойдёт такой пример: пусть первым идёт модуль с нечётным числом задач, потом идут все модули с чётным числом задач, а после них оставшиеся двенадцать модулей с нечётным числом задач. Тогда первый, шестнадцатый, восемнадцатый, двадцатый, двадцать второй, двадцать четвертый и двадцать шестой модули будут начинаться с задачи с нечётным номером.)**

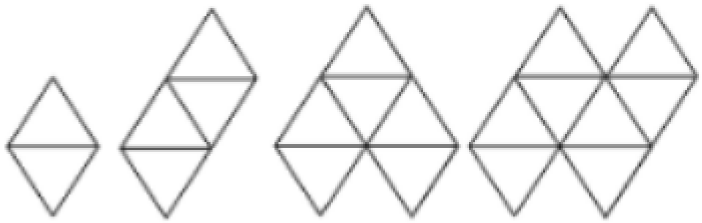
10. Назовём натуральное число *интересным*, если любые три подряд идущие цифры в нём образуют нечётное число. Напишите наибольшее интересное число из различных цифр. (**8697531. Заметим, что в интересном числе все цифры, начиная с третьей цифры слева, нечётные. Значит, в нём не более 2+5 = 7 цифр. Для максимальности первые две цифры будут 8 и 6, следующие пять мест займут нечётные цифры по убыванию.)**

11. Чему может быть равно двузначное число ДА, если УХА : ДА = ДА (разные буквы - разные цифры, одинаковые буквы - одинаковые цифры). В ответе укажите

произведение найденных вариантов? **(<u>496</u>. Квадрат числа ДА оканчивается на ту же цифру А и не превышает 987. Значит, оканчивается на 1, 5, 6 (0 в конце быть не может из-за буквы Х, отличной от А) и не превышает $\sqrt{987}$, что меньше 32. Проверяя числа 11, 15, 16, 21, 25, 26, 31, находим два ответа – 16 и 31.)**

12. Александр и Павел получили по одинаковому картонному прямоугольнику. Каждый мальчик разрезал свой прямоугольник на два новых прямоугольника. Александр посчитал периметры своих прямоугольников и сложил результаты. Получилось 20 см. Павел произвёл такие же расчёты со своими прямоугольниками и получил 25 см. Чему равен периметр исходного картонного прямоугольника? **(<u>15</u>. Понятно, что разрезы были сделаны параллельно одной из сторон исходного прямоугольника. Если бы прямоугольники разрезали вдоль одной и той же стороны, то сумма новых периметров в каждой паре это сумма четырёх длин неразделенной стороны и 2 длин разделённой части. Тогда сумма периметров у Александра и Павла должна быть одинаковой. Значит разрезы были сделаны вдоль разных сторон. Назовём стороны изначального прямоугольника — a и b. Тогда сумма периметров у одного из людей равна $4a + 2b$, а у второго — $2a + 4b$. Периметр исходного листа равен $2a + 2b$. Если мы сложим получившиеся числа у Александра и Павла, то получим $4a + 2b + 2a + 4b = 45$, $6a + 6b = 45$. Тогда поделим обе части на 3 и получим $2a + 2b = 15$. Периметр исходного листа бумаги равен 15 см.)**

13. На рисунке изображены фигуры, сложенные из спичек длины 1 см. Сколько потребуется спичек, чтобы сложить фигуру с номером 2025?



№ 1 № 2 № 3 № 4

(<u>8101</u>. К каждой следующей фигуре прибавляется «ромбик», состоящий из 5 спичек, но без одной границы. Значит за 2024 хода добавится $2024 \cdot 4 = 8096$ спичек. Значит чтобы сложить фигуру № 2025 потребуется $5 + 8096 = 8101$ спичка.)

14. «Спартак» сыграл 6 матчей: 1 матч красно-белые выиграли, 2 свели вничью и 3 проиграли. Всего во всех играх народная команда забила 5 голов и пропустила 3 мяча. С каким счётом мог завершиться матч, в котором «Спартак» победил? Если матч закончился со счётом S:P, где S - количество голов «Спартака», а P - количество голов противника, то нужно найти значение числа 10S+P. Например, при счёте 2:3 нужно найти число 23. Если ответов несколько, то в ответ нужно записать произведение всех найденных ответов. **(<u>50</u>. В проигранных матчах было пропущено хотя бы по 1 мячу, всего пропущено хотя бы 3 — пропущено ровно 3 мяча, все поражения закончились со счётом 0 : 1. Тогда в ничьих «Спартак» не мог больше ни пропустить ни одного мяча, ни забить — все**

ничьи прошли со счётом 0 : 0. Тогда единственный матч, который «Спартак» выиграл закончился со счётом 5 : 0.)

15. Сломанные часы равномерно отстают на 6 минут в час. Четыре с половиной часа тому назад они были поставлены точно. Сейчас сервис «Точное московское время» показывает 11 часов. Через сколько минут (точного времени) на сломанных часах тоже будет 11 часов? **(30. Сломанные часы за 4,5 часа отстали на $4{,}5 \cdot 6 = 27$. Значит сейчас сломанные часы показывают 10:33. Через 27 минут по времени сломанных часов они покажут 11:00. Тогда за это время пройдёт $27 : (54 : 60) = 30$ настоящих минут.)**

16. На острове Невезения живут 1000 жителей: 500 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 500 лгунов, которые всегда лгут. У каждого из жителей острова есть хотя бы один друг. Однажды жители острова встали в шеренгу. Первые 500 заявили: «Все мои друзья — рыцари», а остальные сказали: «Каждый мой друг — лгун». Какое наименьшее количество дружеских пар, состоящих из рыцаря и лгуна, может быть на острове? (Один и тот же житель острова может входить в несколько разных пар). **(250. Меньше 250 таких пар быть не может. Действительно, среди тех 500 аборигенов, кто сказал, что все их друзья — лгуны, есть или хотя бы 250 рыцарей, или по крайней мере 250 лгунов. В первом случае у каждого из 250 рыцарей действительно есть хотя бы по одному другу-лгуну, образующих с ними по крайней мере 250 пар. Во втором случае каждый из 250 лгунов имеет хотя бы одного друга-рыцаря, поскольку на самом деле не все его друзья является лгунами. И здесь есть не менее 250 пар. Количество пар может быть 250. Такой она будет, если, например, рыцарь 1 дружит с лгуном 1, рыцарь 2 дружит с лгуном 2, . . . , рыцарь 250 дружит с лгуном 250, рыцари 251–500 дружат между собой, лгуны 251–500 дружат между собой и больше никто ни с кем не дружит. В таком случае фразу «Каждый мой друг — лгун» скажут первые 250 рыцарей и первые 250 лгунов, а фразу «Каждый мой друг — рыцарь» — остальные жители.)**

17. Во всех клетках таблицы стоят нули. Знайка несколько раз выбирает квадрат 2×2 и увеличивает на 1 все числа, стоящие в нём. Какое число написано в центре таблицы (см. рисунок), если известны числа только в четырёх клетках исходной таблицы?

*	4	*
5	*	*
2	*	3

(9. Каждое число на середине стороны равно сумме двух чисел в соседних с ним угловых клетках, значит, число в левом верхнем углу равно $5 - 2 = 3$, число в правом верхнем углу равно $4 - 3 = 1$. Число в центре равно сумме всех угловых чисел, т. е. $3 + 1 + 2 + 3 = 9$.)

18. У Незнайки есть 27 гирь с целыми массами от 1 до 27 кг (все гири весят разное число килограмм). Незнайка распределил гири на группы, в каждой из которых самая тяжёлая гиря уравновешивает все остальные гири этой группы. Чему может быть равно число групп? В ответе укажите произведение всех возможных вариантов. **(9. Так как все веса разные, то в группе не может быть 2 гири. Наибольшее число групп $27 : 3 = 9$. Ни в какой группе не может быть больше двух гирь, массы которых в кг равны от 14 до 27, тогда групп не менее $(27 - 14 + 1) : 2 + 1 = 8$. Пусть групп 8. Самые тяжёлые гири из групп по условию составляют половину массы всех гирь, их масса равна $27 \cdot 28 : 2 : 2 = 189$ кг. Но 8 самых тяжёлых гирь дают в сумме $20 + 21 + \cdots + 27 = 188$.**

Значит групп могло быть только 9; например, (1 8 9), (2 23 25), (3 21 24), (4 18 22), (5 15 20), (6 13 19), (7 10 17), (11 16 27), (12 14 26).)

19. У Тома Сойера есть пустой клетчатый прямоугольник 6 x 8. Том Сойер в каком-то порядке вписывает в каждую пустую клетку количество граничащих с нею (по стороне) пустых клеток. Чему будет равна сумма всех чисел в прямоугольнике, когда все клетки будут заполнены? **(82. Пусть пустые клетки будут вершинами, а общие границы у клеток --- рёбрами, соединяющими их. Когда мы закрашиваем клетку, мы удаляем вершину и записываем в неё количество рёбер, удаляемых из графа. Общее количество удалённых рёбер --- это количество границ между клетками, то есть 5 * 8 + 7 * 6 = 82.)**

20. Какое наибольшее количество ромбиков из двух треугольников (см. картинку слева), можно вырезать по линиям треугольной сетки из шестиугольника на картинке справа? **(21. Используя шахматную раскраску получаем, что так как каждый ромб содержит чёрную клетку, значит ромбов не более 21. Пример на 21 ромб существует.)**