

Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».

Лига «Начинающие» 5 класс. Решения.

22 февраля 2025 года.

1. Винтик и Шпунтик считали станции метро на Очень Большой Кольцевой линии. Они сели на станции «Победная» в поезда, идущие в разные стороны. Станция «Победная» для каждого из братьев стала 1-й по счёту. Сколько станций на Очень Большой Кольцевой линии, если станция «Олимпийская» была 63-й по счёту у Винтика и 19-й у Шпунтика? **(80. Все станции, кроме «Победной» и «Олимпийской» были посчитаны по разу, а они дважды, поэтому ответ $63 + 19 - 2 = 80$.)**
2. Найдите наименьшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр можно получить любое натуральное число от 1 до 21. **(12013456789. Число должно содержать цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а также комбинацию для числа 11, поэтому содержит минимум две единицы. Тогда минимальное число цифр 11. При этом после первой единицы не может стоять 0 или 1, поскольку тогда не получатся 20 и 21. После цифр 1 и 2 оставшиеся цифры можно поставить по возрастанию.)**
3. Сколькими способами можно разменять 2025 рублей монетами по 1 и 5 рублей? **(406. Количество 5-рублёвых монет может быть любым целым числом от 0 до 405, после этого количество 1-рублёвок определяется однозначно.)**
4. В зоомагазине 3 амадины стоят как 5 попугаев и 2 канарейки, 8 попугаев — как 1 канарейка и 3 амадина. Сколько амадин стоят как 14 канареек? **(6. Введём валюту попугаеписатр. Пусть цена попугая — 1 попугаеписатр, амадины — А попугаеписатров, канарейки — К попугаеписатров. Составим систему уравнений в попугаеписатрах: $3A=5+2K$, $8=1K+3A$. Приравнивая $5+2K = 3A = 8-1K$, получим $K = 1$, $A = 7/3$. Тогда 14 канареек стоят $14 \cdot (7/3) = 6$ амадин.)**
5. Найдите наименьшее количество видов цифр, которое нужно для записи 5 пятизначных чисел с разными остатками от деления на 5. (Например, для записи чисел 12 и 24 нужно всего 3 вида цифр) **(5. У чисел с разными остатками от деления на 5 разные цифры на конце. Значит, нужно хотя бы 5 цифр. Пример строится легко: 11111, 22222, 33333, 44444, 55555)**
6. Два велосипедиста едут по круговой дорожке в одном направлении. Первый обгоняет второго каждые 5 минут. Когда они начали ехать в противоположных направлениях, встречи стали происходить каждые 3 минуты. Во сколько раз скорость первого велосипедиста больше скорости второго? **(4. Пусть v_1 и v_2 — скорости велосипедистов ($v_1 > v_2$). Длина круга L есть скорость сближения велосипедистов умножить на время между встречами, поэтому $3(v_1 + v_2) = L = 5(v_1 - v_2)$, откуда $8v_2 = 2v_1$, т.е. $v_1 = 4v_2$.)**
7. Среди двузначных чисел найдите те, которые не делятся на 13 и не будут делиться на 13 после замены одной любой цифры. Например, из числа 42 можно сделать двузначное число 52, поэтому оно не подходит (первую цифру нельзя менять на 0). В ответе укажите сумму найденных чисел. **(382. Всего есть 7 двузначных чисел, кратных 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Таким образом, двузначное число, из которого нельзя получить одной заменой число, кратное 13, должно начинаться на 4 или 8 и заканчиваться на 0, 4 или 7. Значит, нам подходят числа 40, 44, 47, 80, 84, 87, сумма которых 382.)**

8. Напишите наибольшее число из разных цифр, где любые две соседние цифры образуют простое число. **(89731. Двухзначное простое число не может оканчиваться на нечётную цифру или 5, поэтому всего есть 4 варианта цифр (1, 3, 7, 9) для позиций, начиная со второй. Для максимальности поставим на первое место 8, затем 9, 7, 3, 1. Проверка пар на простоту показывает, что 8973 подходит.)**

9. В некоторой семье мама работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня выходные), папа — по графику «2 через 1» (2 дня работает, 1 день выходной), а дети учатся по пятидневной рабочей неделе без каникул (с понедельника по пятницу). В субботу 22 февраля 2025 года мама летала к бабушке в деревне Дубаево, а 23 февраля 2025 года вся семья провела дома. Какого числа у семьи снова будет общий выходной? Запишите ответ в виде ДДММГГГГ без пробелов и других символов. Например, 01 января 2025 года — это 01012025. **(22032025. Заметим, что общий выходной семьи из-за графика детей приходится на субботу или воскресенье. Понедельник 24 февраля у обоих родителей будет рабочим днём. Далее рабочий график восстанавливается однозначно.)**

| | 22(сб) | 23(вс) | 24(пн) | 25(вт) | 26(ср) | 27(чт) | 28(пт) | 1(сб) | 2(вс) | 3(пн) | 4(вт) | 5(ср) | 6(чт) | 7(пт) | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| м | | | Р | Р | | | Р | Р | | | Р | Р | | | |
| п | Р | | Р | Р | | Р | Р | | Р | Р | | Р | Р | | |
| | 8(сб) | 9(вс) | 10(пн) | 11(вт) | 12(ср) | 13(чт) | 14(пт) | 15(сб) | 16(вс) | 17(пн) | 18(вт) | 19(ср) | 20(чт) | 21(пт) | 22(сб) |
| м | Р | Р | | | Р | Р | | | Р | Р | | | Р | Р | |
| п | Р | Р | | Р | Р | | Р | Р | | Р | Р | | Р | Р | |

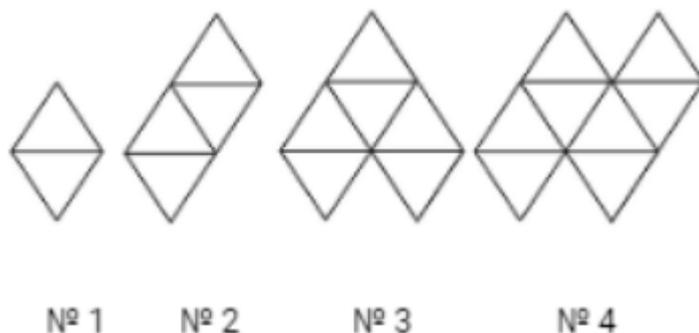
10. Какое число стоит на 2025-м месте в последовательности: 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; ...? **(64. Заметим, что $1 + \dots + 63 = (63 * 64)/2 = 2016$. Значит, начиная с 2017-го места, стоят 64 числа, равных 64.)**

11. Чему может быть равно двухзначное число ДА, если $УХА : ДА = ДА$ (разные буквы - разные цифры, одинаковые буквы - одинаковые цифры). В ответе укажите произведение найденных вариантов? **(496. Квадрат числа ДА оканчивается на ту же цифру А и не превышает 987. Значит, оканчивается на 1, 5, 6 (0 в конце быть не может из-за буквы Х, отличной от А) и не превышает $\sqrt{987}$, что меньше 32. Проверяя числа 11, 15, 16, 21, 25, 26, 31, находим два ответа – 16 и 31.)**

12. Александр и Павел получили по одинаковому картонному прямоугольнику. Каждый мальчик разрезал свой прямоугольник на два новых прямоугольника. Александр посчитал периметры своих прямоугольников и сложил результаты. Получилось 20 см. Павел произвёл такие же расчёты со своими прямоугольниками и получил 25 см. Чему равен периметр исходного картонного прямоугольника? **(15. Понятно, что разрезы были сделаны параллельно одной из сторон исходного прямоугольника. Если бы прямоугольники разрезали вдоль одной и той же стороны, то сумма новых периметров в каждой паре это сумма четырёх длин неразделенной стороны и 2 длин разделённой части. Тогда сумма периметров у Александра и Павла должна быть одинаковой. Значит разрезы были сделаны вдоль разных сторон. Назовём стороны изначального прямоугольника — a и b . Тогда сумма периметров у одного из людей равна $4a + 2b$, а у второго — $2a + 4b$. Периметр исходного листа равен**

$2a + 2b$. Если мы сложим получившиеся числа у Александра и Павла, то получим $4a + 2b + 2a + 4b = 45$, $6a + 6b = 45$. Тогда поделим обе части на 3 и получим $2a + 2b = 15$. Периметр исходного листа бумаги равен 15 см.)

13. На рисунке изображены фигуры, сложенные из спичек длины 1 см. Сколько потребуется спичек, чтобы сложить фигуру с номером 2025?



(8101. К каждой следующей фигуре прибавляется «ромбик», состоящий из 5 спичек, но без одной границы. Значит за 2024 хода добавится $2024 \cdot 4 = 8096$ спичек. Значит чтобы сложить фигуру № 2025 потребуется $5 + 8096 = 8101$ спичка.)

14. «Спартак» сыграл 6 матчей: 1 матч красно-белые выиграли, 2 свели вничью и 3 проиграли. Всего во всех играх народная команда забила 5 голов и пропустила 3 мяча. С каким счётом мог завершиться матч, в котором «Спартак» победил? Если матч закончился со счётом $S:P$, где S - количество голов «Спартака», а P - количество голов противника, то нужно найти значение числа $10S+P$. Например, при счёте 2:3 нужно найти число 23. Если ответов несколько, то в ответ нужно записать произведение всех найденных ответов. (50. В проигранных матчах было пропущено хотя бы по 1 мячу, всего пропущено хотя бы 3 — пропущено ровно 3 мяча, все поражения закончились со счётом 0 : 1. Тогда в ничьих «Спартак» не мог больше ни пропустить ни одного мяча, ни забить — все ничьи прошли со счётом 0 : 0. Тогда единственный матч, который «Спартак» выиграл закончился со счётом 5 : 0.)

15. Сломанные часы равномерно отстают на 6 минут в час. Четыре с половиной часа тому назад они были поставлены точно. Сейчас сервис «Точное московское время» показывает 11 часов. Через сколько минут (точного времени) на сломанных часах тоже будет 11 часов? (30. Сломанные часы за 4,5 часа отстали на $4,5 \cdot 6 = 27$. Значит сейчас сломанные часы показывают 10:33. Через 27 минут по времени сломанных часов они покажут 11:00. Тогда за это время пройдёт $27:(54:60) = 30$ настоящих минут.)

16. На острове Невезения живут 1000 жителей: 500 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 500 лгунов, которые всегда лгут. У каждого из жителей острова есть хотя бы один друг. Однажды жители острова встали в шеренгу. Первые 500 заявили: «Все мои друзья — рыцари», а остальные сказали: «Каждый мой друг — лгун». Какое наименьшее количество дружеских пар, состоящих из рыцаря и лгуна, может быть на острове? (Один и тот же житель острова может входить в несколько разных пар). (250. Меньше 250 таких пар быть не может. Действительно, среди тех 500 аборигенов, кто сказал, что все их друзья — лгуны, есть или хотя бы 250 рыцарей, или по крайней мере 250 лгунов. В первом случае у каждого из 250 рыцарей действительно есть хотя бы по одному другу-лгуну, образующих с ними по крайней мере 250 пар. Во втором

случае каждый из 250 лгунов имеет хотя бы одного друга-рыцаря, поскольку на самом деле не все его друзья является лгунами. И здесь есть не менее 250 пар. Количество пар может быть 250. Такой она будет, если, например, рыцарь 1 дружит с лгуном 1, рыцарь 2 дружит с лгуном 2, . . . , рыцарь 250 дружит с лгуном 250, рыцари 251–500 дружат между собой, лгуны 251–500 дружат между собой и больше никто ни с кем не дружит. В таком случае фразу «Каждый мой друг — лгун» скажут первые 250 рыцарей и первые 250 лгунов, а фразу «Каждый мой друг — рыцарь» — остальные жители.)

17. Во всех клетках таблицы стоят нули. Знайка несколько раз выбирает квадрат 2×2 и увеличивает на 1 все числа, стоящие в нём. Какое число написано в центре таблицы (см. рисунок), если известны числа только в четырёх клетках исходной таблицы? (9. Каждое число на середине стороны равно сумме двух чисел в соседних с ним угловых клетках, значит, число в левом верхнем углу равно $5 - 2 = 3$, число в правом верхнем углу равно $4 - 3 = 1$. Число в центре равно сумме всех угловых чисел, т. е. $3 + 1 + 2 + 3 = 9$.)

| | | |
|---|---|---|
| * | 4 | * |
| 5 | * | * |
| 2 | * | 3 |

18. У Незнайки есть 27 гирь с целыми массами от 1 до 27 кг (все гири весят разное число килограмм). Незнайка распределил гири на группы, в каждой из которых самая тяжёлая гиря уравнивает все остальные гири этой группы. Чему может быть равно число групп? В ответе укажите произведение всех возможных вариантов. (9. Так как все веса разные, то в группе не может быть 2 гири. Наибольшее число групп $27 : 3 = 9$. Ни в какой группе не может быть больше двух гирь, массы которых в кг равны от 14 до 27, тогда групп не менее $(27 - 14 + 1) : 2 + 1 = 8$. Пусть групп 8. Самые тяжёлые гири из групп по условию составляют половину массы всех гирь, их масса равна $27 \cdot 28 : 2 : 2 = 189$ кг. Но 8 самых тяжёлых гирь дают в сумме $20 + 21 + \dots + 27 = 188$. Значит групп могло быть только 9; например, (1 8 9), (2 23 25), (3 21 24), (4 18 22), (5 15 20), (6 13 19), (7 10 17), (11 16 27), (12 14 26).)

19. Двенадцать пятиклассников суммарно на игре решили 72 задачи. Известно, что среди них есть решившие ровно одну задачу, решившие ровно три задачи и решившие ровно четыре задачи. Какое минимальное количество задач мог решить школьник, который решил больше всех задач на игре? (8. Из условия задачи можно заключить, что найдутся девять школьников, решивших $72 - (1 + 3 + 4) = 64$ задачи. Так как $64 = 9 \cdot 7 + 1$, то найдётся школьник, решивший не менее 8 задач.)

20. Какое наибольшее количество ромбиков из двух треугольников (см. картинку слева), можно вырезать по линиям треугольной сетки из шестиугольника на картинке справа? (21. Используя шахматную раскраску получаем, что так как каждый ромб содержит чёрную клетку, значит ромбов не более 21. Пример на 21 ромб существует.)

