

Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».

Лига «Профессионалы» 7 класс. Условия.

24 мая 2025 года.

1. Найдите 17 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна точному кубу и при этом минимально возможна. В ответе укажите наименьшее из этих чисел.
2. В кружке учатся мальчики и девочки. Некоторые из них дружат (дружба взаимна). Всего есть 2000 дружб между мальчиками, и 2024 дружбы между девочками. При этом у каждого ребёнка друзей среди девочек на 1 больше, чем среди мальчиков. Сколько всего детей может быть в кружке? Запишите все возможные варианты по возрастанию без пробелов.
3. Куб со стороной 10 сложен из 1000 кубиков со стороной 1, в каждом из которых находится число. Сумма чисел каждого ряда из десяти кубиков (расположенного в любом из трёх возможных направлений) равна 3. В одном из кубиков записано число 15. Через него проходят три «слоя» $1 \times 10 \times 10$, параллельные граням куба. Найдите сумму всех чисел, записанных в кубиках, не входящих ни в один из этих «слоёв».
4. Взяли два одинаковых полных набора для игры в «Домино» из 28 костяшек. Наборы перемешали и выложили первый набор в ряд по правилам «Домино», а сразу после первого набора достроили в ряд второй набор. Затем посчитали количество костяшек, лежащих строго между каждой парой одинаковых костяшек: между двумя «0-0», между двумя «0-1», и так далее. Найдите наименьшее и наибольшее значение суммы всех 28 найденных чисел. В ответе сначала выпишите наименьшее, а затем без пробелов – наибольшее.
5. Школьный турнир по настольному теннису проходил по такой системе: в каждом туре игроки разбивались на пары и играли по одной партии, при этом пары никогда не повторялись. Школьник, проигравший дважды, выбывал из турнира (ничьих в теннисе не бывает). Если в каком-то туре количество участников было нечётно, то один проходил в следующий тур без игры. Сколько человек участвовало в турнире, если до финала, в котором играли двое, было сыграно 29 партий?
6. К кабинке канатной дороги, идущей на гору, подошли гномы. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме как вверх, так и вниз кабинка ходит с двумя или с тремя пассажирами, при этом пассажиры сидят на двух скамьях так, чтобы массы на скамьях были одинаковыми. Сколько существует n ($2 < n < 2025$) таких, что на гору смогут подняться $n+2$ гнома массами 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n стоунов?
7. При каком наибольшем k можно расставить несколько королей на шахматной доске так, чтобы каждый из них бил ровно k других?

8. Петя и Вася идут рядом с одинаковой постоянной скоростью. Когда им на пути встретился траволатор, Петя пошёл рядом с ним, а Вася – по траволатору. Через минуту они одновременно подошли к концу траволатора, но по пути Вася на 15 секунд остановился завязать шнурки. За какое время Вася прошёл бы траволатор, если бы не останавливался?
9. Разбойники подарили Али-Бабе круглый торт. На нём размечены радиусы, делящие его на 41 равную порцию. Сколькими способами можно разрезать торт по трём радиусам так, чтобы среди получившихся кусков были равные? Способы считаются различными, если разрезы идут по разным наборам радиусов.
10. В доме два лифта: пассажирский и грузовой, каждый из них ходит вверх и вниз с постоянной скоростью. Сейчас пассажирский лифт на 10-м этаже, а грузовой – на 21-м. Саша живёт на 18-м этаже, а Ваня – на самом верхнем, и оба они хотят спуститься на первый этаж. Саше безразлично, какой лифт вызвать – он спустится за одинаковое время. Любопытно, что и Ване тоже всё равно, какой из лифтов вызывать. Сколько этажей может быть в доме? Выпишите все варианты в порядке возрастания без пробела.
11. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P , а на стороне BC – точка Q так, что прямая PQ перпендикулярна AC . Известно, что $AP=4$, $BQ=3$, $CQ=2$. Чему может быть равен угол ABC ? Выпишите все варианты в порядке возрастания без пробела и знаком градусов.
12. Контроль времени «5+3» в шахматной партии устроен так: у игрока на часах первоначально 5 минут, а после каждого его хода к остатку времени добавляется 3 секунды (ход считается завершённым и при истечении времени на часах в момент нажатия кнопки). На первый свой ход Петя потратил 1 секунду, на второй – 2 секунды, на третий – 3 секунды и так далее. Какое наибольшее число ходов он мог сделать?
13. Решите в натуральных числах уравнение $m!+n!=m^n$. Для каждого решения найдите сумму $m+n$. Выпишите все найденные суммы по возрастанию без пробелов, если какая-то сумма встретится в нескольких решениях, то её нужно выписать столько же раз.
14. Найдите наименьшее простое число, которое можно представить в виде суммы семи различных простых чисел.
15. Укажите натуральное n , при котором отношение $(4n+10) / (4n-10)$ наименьшее.
16. У Деда Мороза есть пять мешков с новогодними шарами, по 99 шаров в каждом. Он знает, что в одном из мешков лежат красные шарики, в другом — зелёные, в третьем — синие, а в каждом из двух оставшихся поровну красных, зелёных и синих. Можно одновременно достать любое число шаров из любых мешков и посмотреть, что это за шары (вынимаются шары один раз). Какое

наименьшее число шаров нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешка?

17. 9 фонарей расположены в виде квадрата 3×3 . За одно действие Фонарщик может поменять состояние любых четырёх фонарей, образующих квадрат 2×2 . Сколько различных комбинаций Фонарщик может получить из состояния, когда все фонари не горят?

18. Биссектриса BL треугольника ABC равна 2. Чему равна разность сторон AC и AB , если угол ABC равен 120° , а угол ACB равен 40° ?

19. За столом сидело несколько жителей Острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого про его ближайших соседей. Каждый ответил: «Оба моих соседа — лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного больше или на одного меньше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Сколько человек могло быть за столом? Найдите все возможные варианты и запишите их по возрастанию без пробелов.

20. Боря играет в игру «Сапёр». В некоторых клетках поля $n \times n$ заложены мины (в каждой клетке не более одной). Для КАЖДОЙ вертикали, горизонтали и диагонали (одна угловая клетка — тоже диагональ) известно количество заложённых на ней мин. При каких натуральных n Боря всегда можно определить, где заложены мины? Выпишите все найденные ответы в порядке возрастания без пробелов.