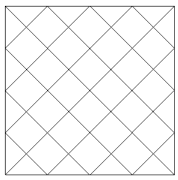
Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».
Лига «Профессионалы». 7 класс. Решения.
19 августа 2025 года.

1. В треугольнике ABC с $\angle B$=40° провели биссектрису BK, а из точки K опустили перпендикуляр KH на сторону AB. Оказалось, что H – середина стороны AB. Найдите $\angle BKC$ в градусах. (**40°. Из условия следует, что ΔABK – равнобедренный, т.к. KB одновременно и высота, и медиана. Тогда $\angle BAK=\angle ABK=\angle ABC/2$=20°, откуда $\angle BKC=\angle BAK+\angle ABK$=40° как внешний угол этого треугольника.)**

2. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором сумма любых трёх подряд идущих цифр делится на 2. (**98756314. В каждой тройке должны быть либо три чётных цифры (тогда в числе максимум 5 цифр), либо одна чётная и две нечётные цифры, которые должны циклически повторяться по чётности: (ннч), (нчн) или (чнн). Тогда между ближними чётными цифрами должны идти две нечётные цифры, значит, между чётными цифрами не более [5:2]=2 промежутков из нечётных цифр. Следовательно, в нашем числе не более 3 чётных и 5 нечётных цифр, а максимально возможным восьмизначным числом будет 98756314.)**

3. Знайка, рассматривая коллекцию инвестиционных монет, выложил в ряд 2025 монет достоинством 1, 2 и 3 рубля. Оказалось, что между любыми двумя рублёвыми монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухрублёвыми монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трёхрублевыми монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Знайки могло быть трёхрублёвых монет? Укажите все найденные ответы без пробелов в порядке возрастания. (**506507. Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трёхрублёвая. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трёхрублёвой, то однорублёвые и двухрёблёвые монеты чередуются, что невозможно. Двух трёхрублёвых монет тоже не может быть, т.к. между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2024 монет ровно 506 трёхрублёвых. Следовательно, всего трёхрублёвых монет может быть 506 или 507. Оба ответа возможны, например, 12131213121312 .. 2131 и 3121312131213 .. 31213.)**

4. Каждую сторону квадрата разделили на 2025 равных частей и через каждую точку деления провели по две прямые (через вершины – по одной), параллельные диагоналям квадрата. На сколько частей все проведённые прямые разбили квадрат? (**8205300 = 2·2025·(2025+1)=2·2025²+2·2025. Считаем сторону квадрата равной n = 2025, тогда к краю примыкает 4n равнобедренных треугольника площадью 0,25, а внутри количество квадратиков, имеющих площадь 0,5, равно (n^2-4n·0,25):0,5=2·(n^2-n). Тогда всего будет 4n+2·(n^2-n)= 2n^2+2n частей.)**



5. Найдите наибольший простой делитель числа (8^{16} – 16^8). (**257, т.к. $8^{16}-16^8=2^{48}-2^{32}=2^{32}\cdot(2^8-1)\cdot(2^8+1)=2^{32}\cdot255\cdot257$)**

6. На плоскости даны три равных несовпадающих отрезка. Сколько осей симметрии может иметь фигура, состоящая из этих трёх отрезков? Укажите все найденные ответы без пробелов в порядке убывания. (**63210. Фигура может иметь 6, 3, 2, 1 или 0 осей симметрии**)

7. Выпишите в порядке убывания без пробелов все натуральные числа x, удовлетворяющие ровно одному из четырёх условий: 1) x>6; 2) x − чётно; 3) x делится на 3; 4) x>12. (**117432. Нам подходят числа 2, 3, 4, 7 и 11, которые находим перебором первых 12 натуральных чисел. Все остальные не подходят, т.к. для них выполняются по крайней мере уже два условия – первое и четвёртое.)**

8. Сколько существует несократимых дробей с числителем 2025, которые больше 1/2026 и меньше 1/2025, и при этом не равны целому числу? (**1080 дробей. Обозначим нашу несократимую дробь как 2025/N, тогда $2025^2<N<2025\cdot2026$. Т.е. натуральное число N имеет вид 2025^2+K, где K – натуральное число и $1\le K\le2024$. Но в силу несократимости исходной дроби K должно быть взаимно просто с числом 2025. Таким образом, ответ можно найти при помощи функции Эйлера $\varphi(n)$: 1080 = $\varphi(2025) = \varphi(3^4\cdot5^2) = (3^4-3^3)\cdot(5^2-5^1)$ вариантов числа K.)**

9. На Поле Чудес используются монеты с номиналом 1, 15 и 50 сольдо. Буратино отдал за букварь несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какое минимальное количество сольдо мог стоить букварь? (**6 сольдо. Нетрудно построить пример, когда покупка стоит 6 сольдо:**

Буратино заплатил две монеты − 1 сольдо и 50 сольдо, а сдачу получил тремя монетами по 15 сольдо. Докажем, что покупка не могла стоить меньше шести сольдо. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Буратино отдал k монет на сумму A. Тогда остаток от деления A на 7 равен остатку от деления k на 7. Остаток от деления на 7 сдачи C равен остатку от деления k+1 на 7. Остаток от деления на 7 стоимости покупки (A−C) равен разности остатка от деления A на 7 и остатка от деления C на 7, т. е. равен 6. Поэтому стоимость покупки не может быть меньше 6 сольдо.)

10. Из вершины развёрнутого угла провели N лучей так, что величины всех (N+1) получившихся углов между соседними лучами различны и равны целому количеству градусов. При каком наибольшем N такое могло быть? **(17 лучей. Если бы было не менее 18 лучей, то сумма всех 19 углов была бы не меньше 1+2+3+…+19=20·19/2=190 градусов, что больше развёрнутого угла (180°). Значит, всего не менее 17 лучей, которые могли образовать по очереди углы в 1°, 2°, 3°, …, 17° и 27°.)**

11. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут) в математической игре участвовали 15 команд по 4 человека в каждой команде. Капитан каждой команды заявил, что по крайней мере в трёх командах есть рыцари. Какое количество рыцарей могло участвовать в этой игре? В ответе укажите, сколько существует подходящих количеств рыцарей. Например, если могло быть 1, 8 или 32 рыцаря, то в ответе надо указать число 3. **(<u>53</u>. Если хотя бы один капитан лжёт, то рыцари присутствуют максимум в двух командах и при этом нет капитанов-рыцарей. Тогда рыцарей не более 6 (максимум по 3 в двух командах), причём каждый вариант реализуется. Если же нет капитана-лжеца, то рыцарей уже не менее 15 (все капитаны), причём каждый из вариантов от 15 до 60 рыцарей реализуется.)**

12. Разбейте число 186 на три попарно различных натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье. В ответе укажите их в порядке возрастания без пробелов. **(<u>316293</u>. Упорядочим числа $a<b<c$, тогда из условия $a+b$ кратно c и оценки $a+b<2c$ следует, что $a+b=c$=186:2=93. Тогда $2a+b=a+c$ кратно b, значит, $2a$ кратно b, но $2a<2b$, следовательно, $2a=b$ и с учётом $a+b$=93 получаем, что a=31, b=62.)**

13. Про числа a, b, c и d известно, что $a=bcd$, $a+b=cd$, $a+b+c=d$ и $a+b+c+d=1$. Найдите наименьшее из этих чисел и представьте его в виде несократимой дроби m/n, где m − целое, n − натуральное. В ответе запишите числа m и n без пробелов. **(<u>142</u>. Из последнего равенства получаем, что $a+b+c=1–d$. Поэтому $d=1–d$, откуда d=1/2. Подставляя это значение d во второе и третье уравнения, получаем $a+b=c/2$ и $a+b+c$=1/2, откуда $3c/2$=1/2 и c=1/3 . Подставляя найденные значения c и d в первое и второе уравнения, получаем $a=b/6$ и $a+b$=1/6, откуда b=1/7 и a=1/42.)**

14. В виде суммы какого наибольшего количества простых слагаемых можно представить число 2025? **(<u>1012 слагаемых</u> В качестве примера подойдут одна 3, остальные - 2. Вся сумма нечётна, значит, в ней есть нечётное слагаемое, которое не меньше 3, тогда остальных слагаемых не больше [(2025−3):2]=1004, т.к. каждое из остальных слагаемых не меньше 2.)**

15. Планета представляет из себя куб со стороной 5. Каждая страна на планете − это кубик со стороной 1. Какое минимальное число пограничных переходов между соседними (по стороне) странами нужно сделать, чтобы из каждой страны можно было добраться до края планеты? **(<u>27=3³</u>. Рассуждать будем в общем виде для куба со стороной n. Покажем, что меньшего, чем $(n−2)^3$, числа переходов недостаточно. Удалим все граничные страны-кубики. Останется куб $(n−2)\times(n−2)\times(n−2)$, разбитый на $(n−2)^3$ стран-кубиков. Теперь пространство разделено границами на $(n−2)^3+1$ областей, считая внешнюю. Удаление одной границы путём создания пограничного перехода уменьшает число областей не более, чем на 1. В конце число областей должно стать равным 1, поэтому придётся удалить не менее $(n−2)^3$ перегородок. Этого количества хватает: достаточно из каждого неграничного кубика убрать нижнюю грань.)**

16. Петя задумал четыре числа, попарно сложил их и выписал на доске пять из шести получившихся сумм. Это оказались числа 13, 15, 18, 20, 22. Чему может быть равна шестая сумма? Укажите все найденные ответы в порядке возрастания без пробелов. **(<u>1117</u>. Заметим, что шесть получившихся попарных сумм из чисел a, b, c и d разбиваются на три пары с равной суммой (a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c). Тогда в нашем наборе возможны варианты 33=13+20=15+18=22+x и 35=13+22=15+20=18+x, откуда получаем либо x=11, либо x=17. При**

этом в первом случае это возможно при наборе начальных чисел (3, 8, 10, 12), а втором случае (5, 8, 10, 12).)