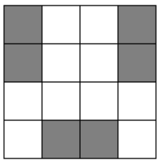
Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти».
Лига «Любители». 6 класс. Решения.
19 августа 2025 года.

1. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его цифр (уже нового числа) и так далее. После 12 таких вычитаний впервые получился ноль. С какого числа начали? В ответе укажите все возможные варианты в порядке возрастания без пробелов. (**<u>110111112113114115116117118119</u>. После первого вычитания возникает число, кратное 9, т.к. натуральное число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9. После этого на каждом шаге получается число, кратное 9. Анализом с конца получаем, что на последних 9 шагах была следующая цепочка чисел 0←9←18←27←36←45←54←63←72←81, т.к. мы могли отнимать только 9 в силу признака делимости на 9 и суммы цифр меньшей 18. На втором шаге было либо 81←90, что невозможно при проверке больших чисел, либо 81←99. 99 могло быть получено только из 108. 108 в свою очередь могло быть получено из любого целого числа от 110 до 119, что показывает проверка.)**

2. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором сумма любых трёх подряд идущих цифр делится на 2. (**<u>98756314</u>. В каждой тройке должны быть либо три чётных цифры (тогда в числе максимум 5 цифр), либо одна чётная и две нечётные цифры, которые должны циклически повторяться по чётности: (ннч), (нчн) или (чнн). Тогда между ближними чётными цифрами должны идти две нечётные цифры, значит, между чётными цифрами не более [5:2]=2 промежутков из нечётных цифр. Следовательно, в нашем числе не более 3 чётных и 5 нечётных цифр, а максимально возможным восьмизначным числом будет 98756314.)**

3. Знайка, рассматривая коллекцию инвестиционных монет, выложил в ряд 2025 монет достоинством 1, 2 и 3 рубля. Оказалось, что между любыми двумя рублёвыми монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухрублёвыми монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трёхрублевыми монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Знайки могло быть трёхрублёвых монет? Укажите все найденные ответы без пробелов в порядке возрастания. (**<u>506507</u>. Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трёхрублёвая. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трёхрублёвой, то однорублёвые и двухрёблёвые монеты чередуются, что невозможно. Двух трёхрублёвых монет тоже не может быть, т.к. между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2024 монет ровно 506 трёхрублёвых. Следовательно, всего трёхрублёвых монет может быть 506 или 507. Оба ответа возможны, например, 12131213121312 .. 2131 и 3121312131213 .. 31213.)**

4. В каждой клетке доски 4×4 стоит по фишке. Каждую фишку переложили на соседнюю по стороне клетку. Какое наименьшее количество занятых клеток могло получиться после такого перекладывания? (**<u>6 занятых клеток, см. пример на рисунке</u>. Заметим также, что фишки с отмеченных на этом рисунке 6 клеток перекладывают в разные клетки, значит, будет занято не менее 6 клеток.)**



5. Футболисты команды «Динамо» провели три игры, в которых они забили три мяча, а пропустили один. Сколько очков они могли набрать в этих трёх играх? (За победу команда получает 3 очка, за ничью − 1, за поражение – 0.) Запишите в ответе все возможные варианты в порядке возрастания без пробелов. (**<u>4567</u>. Забитых мячей больше, чем пропущенных, значит, «Динамо» выиграло хотя бы 1 матч, при этом все три матча выиграны быть не могли, т.к. для этого надо было иметь разницу мячей не меньше 3, а она равна 2. Кроме того, «Динамо» могло проиграть максимум 1 матч, т.к. пропустило всего 1 мяч. Значит, могли быть следующие варианты побед, ничьих и поражений (в скобках указаны примеры возможных вариантов счёта в матчах): 1-1-1 (3:0, 0:0, 0:1 – 4 очка), 1-2-0 (2:0, 1:1, 0:0 – 5 очков), 2-0-1 (1:0, 2:0, 0:1 – 6 очков) и 2-1-0 (1:0, 1:0, 1:1 – 7 очков).)**

6. В одной из двух бочек 8 литров мёда, другая − пуста. Из первой бочки во вторую переливают половину имеющегося там мёда, затем из второй в первую − треть имеющегося там мёда, потом из первой во вторую − четверть имеющегося там мёда и т.д. Сколько мёда будет в первой бочке после 11 переливаний? (<u>4 литра</u>. **Вначале во второй бочке оказывается ровно 4 л, затем из неё отливают (1/*n*) столько же, сколько затем вольют обратно (1/(*n*+1) часть от (*n*+1)/*n*), т.е. после каждого нечётного по номеру переливания в обеих бочках будет по 4 л.)**

7. Выпишите в порядке убывания без пробелов все натуральные числа x, удовлетворяющие ровно одному из четырёх условий: 1) $x>6$; 2) x − чётно; 3) x делится на 3; 4) $x>12$. **(<u>117432.</u> Нам подходят числа 2, 3, 4, 7 и 11, которые находим перебором первых 12 натуральных чисел. Все остальные не подходят, т.к. для них выполняются по крайней мере уже два условия – первое и четвёртое.)**

8. Газету (прямоугольный лист) 8 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперёк), после чего оторвали от неё 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок? **(<u>225 дырок</u>. Заметим, что после каждых двух складываний линейные размеры газеты уменьшались в 2 раза, значит, после 8 действий мы получили газету, размеры которой в $2^4=16$ раз меньше. После разворачивания у нас образовалась клетчатая решётка 16×16, в которой дырки будут около каждого из $15^2=225$ внутренних узлов.)**

9. На Поле Чудес используются монеты с номиналом 1, 15 и 50 сольдо. Буратино отдал за букварь несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какое минимальное количество сольдо мог стоить букварь? **(<u>6 сольдо</u>. Нетрудно построить пример, когда покупка стоит 6 сольдо: Буратино заплатил две монеты − 1 сольдо и 50 сольдо, а сдачу получил тремя монетами по 15 сольдо. Докажем, что покупка не могла стоить меньше шести сольдо. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Буратино отдал *k* монет на сумму *A*. Тогда остаток от деления *A* на 7 равен остатку от деления *k* на 7. Остаток от деления на 7 сдачи *C* равен остатку от деления *k*+1 на 7. Остаток от деления на 7 стоимости покупки (*A*−*C*) равен разности остатка от деления *A* на 7 и остатка от деления *C* на 7, т. е. равен 6. Поэтому стоимость покупки не может быть меньше 6 сольдо.)**

10. В выражении 2025 - 2026 - 2025 - 2026 - 2025 - … - 2025 (всего 2025 чисел) некоторым образом расставили скобки и вычислили значение полученного выражения. Какое наибольшее значение могло быть получено? Ответ дать числом в десятичной записи. **(<u>4097585</u>. Заметим, что число 2026, стоящее на втором месте, в любом случае будет вычитаться, значит, мы сможем получить не больше чем $2025\cdot1013+2026\cdot1011-2026=2025\cdot1013+2026\cdot1010=4097585$, что и можно получить, поставив скобку сразу перед этим числом 2010 и в конце всего выражения.)**

11. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут) в математической игре участвовали 15 команд по 4 человека в каждой команде. Капитан каждой команды заявил, что по крайней мере в трёх командах есть рыцари. Какое количество рыцарей могло участвовать в этой игре? В ответе укажите, сколько существует подходящих количеств рыцарей. Например, если могло быть 1, 8 или 32 рыцаря, то в ответе надо указать число 3. **(<u>53</u>. Если хотя бы один капитан лжёт, то рыцари присутствуют максимум в двух командах и при этом нет капитанов-рыцарей. Тогда рыцарей не более 6 (максимум по 3 в двух командах), причём каждый вариант реализуется. Если же нет капитана-лжеца, то рыцарей уже не менее 15 (все капитаны), причём каждый из вариантов от 15 до 60 рыцарей реализуется.)**

12. Разбейте число 186 на три попарно различных натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье. В ответе укажите их в порядке возрастания без пробелов. **(<u>316293</u>. Упорядочим числа $a<b<c$, тогда из условия $a+b$ кратно c и оценки $a+b<2c$ следует, что $a+b=c=186:2=93$. Тогда $2a+b=a+c$ кратно b, значит, $2a$ кратно b, но $2a<2b$, следовательно, $2a=b$ и с учётом $a+b=93$ получаем, что $a=31$, $b=62$.)**

13. На прямой отметили две точки на расстоянии 13 см друг от друга. Какое наименьшее число точек надо ещё отметить на отрезке с концами в этих точках, чтобы для любого натурального числа от 1 до 13 нашлись две отмеченные точки, расстояние между которыми равно этому числу (в см)? **(<u>4</u>, в качестве примера подойдут точки с координатами 1, 4, 5 и 11 тогда 1=1-0, 2=13-11, 3=4-1, 4=4-0, 5=5-0, 6=11-5, 7=11-4, 8=13-5, 9=13-4, 10=11-1, 11=11-0, 12=13-1, 13=13-0. Если взять не более трёх новых точек, то будет не более** $C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot3!}=10$ **различных отрезков, т.к. их количество не более количества пар точек.)**

14. В виде суммы какого наибольшего количества простых слагаемых можно представить число 2025? **(<u>1012 слагаемых</u> В качестве примера подойдут одна 3, остальные - 2. Вся сумма нечётна, значит, в ней есть нечётное слагаемое, которое не меньше 3, тогда остальных слагаемых не больше [(2025−3):2]=1004, т.к. каждое из остальных слагаемых не меньше 2.)**

15. На плоскости даны 10 прямых, среди которых нет параллельных. Ровно четыре из них пересекаются в точке A и ровно три − в точке B, а в остальных случаях прямые пересекаются только по две. Сколько всего различных точек пересечения у этих прямых? **(<u>38 точек пересечения</u>. Всего существует $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ пар прямых и точек пересечения в этих парах, но в точках *A* и *B* будет соответственно шесть и три совпадающих точки пересечения (6 и 3 пары прямых), значит, всего 45−5−2=38 различных точек пересечения.)**

16. Петя задумал четыре числа, попарно сложил их и выписал на доске пять из шести получившихся сумм. Это оказались числа 13, 15, 18, 20, 22. Чему может быть равна шестая сумма? Укажите все найденные ответы в порядке возрастания без пробелов. **(<u>1117</u>. Заметим, что шесть получившихся попарных сумм из чисел a, b, c и d разбиваются на три пары с равной суммой (a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c). Тогда в нашем наборе возможны варианты 33=13+20=15+18=22+x и 35=13+22=15+20=18+x, откуда получаем либо x=11, либо x=17. При этом в первом случае это возможно при наборе начальных чисел (3, 8, 10, 12), а втором случае (5, 8, 10, 12).)**