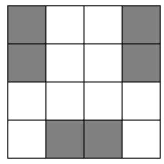
. Ассоциация победителей олимпиад. Игра «Пенальти». Лига «Начинающие». 5 класс. Решения. 19 августа 2025 года.

1. Сумма двух натуральных чисел равна 1244. Если в конце первого числа приписать 3, а в конце второго отбросить 2, то числа окажутся равными. Найдите эти числа и запишите в правильном порядке без пробелов. (**121232. Пусть первое число равно x, а второе равно y, тогда $x+y=1244$. Приписывание к первому числу 3 даст число $10x+3$, а отбрасывание от второго 2 даст число $(y-2):10$, т.е. $10x+3(y-2):10$. Решая получившуюся систему из двух уравнений, найдём $x=12$ и $y=1232$.)**

2. Все трёхзначные числа записали в ряд: 100101102…998999. Сколько раз в этом ряду после двойки идёт единица? (**29 раз, т.к. пара 21 встречается либо в числах от 210 до 219 (10 чисел), либо в каждой сотне в числе, оканчивающемся на 21 (это 9 чисел)), либо в первой сотне после чисел, оканчивающихся на 2 (102,103; 112,113; …; 192,193 – ещё 10 раз).)**

3. Футболисты команды «Динамо» провели три игры, в которых они забили три мяча, а пропустили один. Сколько очков они могли набрать в этих трёх играх? (За победу команда получает 3 очка, за ничью − 1, за поражение – 0.) Запишите в ответе все возможные варианты в порядке возрастания без пробелов. (**4567. Забитых мячей больше, чем пропущенных, значит, «Динамо» выиграло хотя бы 1 матч, при этом все три матча выиграны быть не могли, т.к. для этого надо было иметь разницу мячей не меньше 3, а она равна 2. Кроме того, «Динамо» могло проиграть максимум 1 матч, т.к. пропустило всего 1 мяч. Значит, могли быть следующие варианты побед, ничьих и поражений (в скобках указаны примеры возможных вариантов счёта в матчах): 1-1-1 (3:0, 0:0, 0:1 – 4 очка), 1-2-0 (2:0, 1:1, 0:0 – 5 очков), 2-0-1 (1:0, 2:0, 0:1 – 6 очков) и 2-1-0 (1:0, 1:0, 1:1 – 7 очков).)**

4. В каждой клетке доски 4×4 стоит по фишке. Каждую фишку переложили на соседнюю по стороне клетку. Какое наименьшее количество занятых клеток могло получиться после такого перекладывания? (**6 занятых клеток, см. пример на рисунке. Заметим также, что фишки с отмеченных на этом рисунке 6 клеток перекладывают в разные клетки, значит, будет занято не менее 6 клеток.)**



5. На острове рыцарей и лжецов (рыцари говорят правду, лжецы – лгут) в некоторой компании каждый сказал остальным: «Среди вас ровно 4 рыцаря». Сколько рыцарей могло быть в этой компании? Укажите все возможные варианты без пробелов в порядке убывания. (**50. Если в этой компании все были лжецами, тогда все действительно соврали. Если же в этой компании были рыцари, то каждый рыцарь сказал правду, что есть ещё 4 (кроме него) рыцаря среди остальных, а все лжецы действительно соврали. Тогда рыцарей было 5 или 0.)**

6. Укажите в порядке возрастания без пробелов все шестизначные числа, начинающиеся на 789 и делящиеся на 7, на 8 и на 9 без остатка. (**789264789768. Полученное число должно делиться на $7\cdot8\cdot9=504$. Поделим 789000 на 504 с остатком: $789000=1565\cdot504+240$. Поскольку $504-240=264$, то на 504 делятся числа 789264 и $789264+504=789768$. Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от 789 000 до 789 999 нет.)**

7. Сколько существует натуральных чисел, у которых при делении на 7 в частном получится то же число, что и в остатке? (**6 чисел. Остаток при делении на 7 не может превышать 6, таким образом, интересующие нас натуральные числа можно представить в виде $7a+a=8a$, где $a\in\{1, 2, ..., 6\}$. Тогда эти числа − 8, 16, 24, 32, 40, 48.)**

8. Газету (прямоугольный лист) 8 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперёк), после чего оторвали от неё 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок? (**225 дырок. Заметим, что после каждых двух складываний линейные размеры газеты уменьшались в 2 раза, значит, после 8 действий мы получили газету, размеры которой в $2^4=16$ раз меньше. После разворачивания у нас образовалась клетчатая решётка 16×16, в которой дырки будут около каждого из $15^2=225$ внутренних узлов.)**

9. В одной из двух бочек 8 литров мёда, другая − пуста. Из первой бочки во вторую переливают половину имеющегося там мёда, затем из второй в первую − треть имеющегося там мёда, потом из первой во вторую − четверть имеющегося там мёда и т.д. Сколько мёда будет в первой бочке после 11 переливаний? (**4 литра. Вначале во второй бочке оказывается ровно 4 л, затем из неё**

отливают ($1/n$) столько же, сколько затем вольют обратно ($1/(n+1)$ часть от $(n+1)/n$), т.е. после каждого нечётного по номеру переливания в обеих бочках будет по 4 л.)

10. Стулья выставлены в два ряда одинаковой длины, причём в первом ряду расстояние между соседними стульями в 2 раза больше, чем во втором (между соседними стульями в одном ряду одинаковое расстояние). Сколько стульев во втором ряду, если в первом ряду их 2025? (**<u>4049</u>. Между 2025 стульями первого ряда 2024 промежутка, тогда во втором ряду между стульями будет в 2 раза больше промежутков 2024 * 2=4048, т.е. всего будет 2048+1=4049 стульев.)**

11. Сколько среди тысячи первых натуральных чисел таких, в записи которых встречаются ровно две одинаковые цифры? (**<u>252</u>=3 $\cdot$ 81+9 чисел. Имеется по 9 $\cdot$ 9=81 трёхзначному числу каждого из трёх видов** $\overline{aab}, \overline{aba}, \overline{baa}$ **, т.к. первая цифра в каждом случае выбирается 9 способами (любая, кроме 0), а другая, отличная от первой, цифра выбирается также 9 способами. Кроме того, есть ещё 9 двузначных чисел из одинаковых цифр.)**

12. В выражении 2025 - 2026 - 2025 - 2026 - 2025 - … - 2025 (всего 2025 чисел) некоторым образом расставили скобки и вычислили значение полученного выражения. Какое наибольшее значение могло быть получено? Ответ дать числом в десятичной записи. (**<u>4097585</u>. Заметим, что число 2026, стоящее на втором месте, в любом случае будет вычитаться, значит, мы сможем получить не больше чем 2025 $\cdot$ 1013+2026 $\cdot$ 1011−2026=2025 $\cdot$ 1013+2026 $\cdot$ 1010=4097585, что и можно получить, поставив скобку сразу перед этим числом 2010 и в конце всего выражения.)**

13. На прямой отметили две точки на расстоянии 13 см друг от друга. Какое наименьшее число точек надо ещё отметить на отрезке с концами в этих точках, чтобы для любого натурального числа от 1 до 13 нашлись две отмеченные точки, расстояние между которыми равно этому числу (в см)? **(<u>4</u>, в качестве примера подойдут точки с координатами 1, 4, 5 и 11 тогда 1=1-0, 2=13-11, 3=4-1, 4=4-0, 5=5-0, 6=11-5, 7=11-4, 8=13-5, 9=13-4, 10=11-1, 11=11-0, 12=13-1, 13=13-0. Если взять не более трёх новых точек, то будет не более** $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ **различных отрезков, т.к. их количество не более количества пар точек.)**

14. На плоскости даны 10 прямых, среди которых нет параллельных. Ровно четыре из них пересекаются в точке A и ровно три − в точке B, а в остальных случаях прямые пересекаются только по две. Сколько всего различных точек пересечения у этих прямых? (**<u>38 точек пересечения</u>. Всего существует** $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ **пар прямых и точек пересечения в этих парах, но в точках A и B будет соответственно шесть и три совпадающих точки пересечения (6 и 3 пары прямых), значит, всего 45−5−2=38 различных точек пересечения.)**

15. В некотором году в каждом из трёх последовательных месяцев было ровно по четыре воскресенья. Какой месяц гарантированно был среди этих трёх? В ответе напишите номер этого месяца в году. (**<u>2</u>. Если среди трёх подряд идущих месяцев нет февраля, то в каждом из них не меньше 30 дней, а хотя бы в одном – 31 день. Значит, всего в них не меньше 91 дня. Но среди любых семи дней, идущих подряд, есть ровно одно воскресенье. Т.к. 91 = 7×13, то в трёх таких месяцах 13 воскресений, а при выполнении условия задачи их должно быть 12. При этом возможен и вариант «декабрь, январь, февраль» (90 дней) и вариант «февраль, март, апрель» (89 дней), значит, нужным нам месяцем мог быть только февраль.)**

16. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его цифр (уже нового числа) и так далее. После 12 таких вычитаний впервые получился ноль. С какого числа начали? В ответе укажите все возможные варианты в порядке возрастания без пробелов. (**<u>110111112113114115116117118119</u>. После первого вычитания возникает число, кратное 9, т.к. натуральное число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9. После этого на каждом шаге получается число, кратное 9. Анализом с конца получаем, что на последних 9 шагах была следующая цепочка чисел 0←9←18←27←36←45←54←63←72←81, т.к. мы могли отнимать только 9 в силу признака делимости на 9 и суммы цифр меньшей 18. На втором шаге было либо 81←90, что невозможно при проверке больших чисел, либо 81←99. 99 могло быть получено только из 108. 108 в свою очередь могло быть получено из любого целого числа от 110 до 119, что показывает проверка.)**