



Программа занятий Школы АПО по математике в 2024–2025 учебном году

8-9 классы

Сентябрь 2024
года

Тема месяца: методы рассуждений и логика.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- концепцию чётности и принцип чередования;
- идею биекции для сравнения мощности множеств;
- что такое инвариант процесса и возможности применения инвариантов в задачах на доказательство;
- понятие полуинварианта и возможности применения полуинвариантов в задачах;
- как различные раскраски клетчатой плоскости могут помочь в задачах на доказательство;
- что значит «гарантированно» выполнить что-либо в математических задачах на алгоритмы;
- концепцию количества информации;
- как рационально осуществляется перебор в логических задачах с истинными и ложными утверждениями;

обучающийся **умеет:**

- применять идеи чётности и чередования;
- использовать принцип разбиения на пары и группы в различных задачах;
- решать задачи с помощью идеи поиска инварианта;
- решать задачи на клетчатой плоскости методом раскраски;
- применять полуинварианты в задачах;
- конструировать алгоритмы в задачах на взвешивания;





- доказывать минимальность количества операций для гарантированного осуществления необходимого результата в алгоритмических задачах;
- решать логические задачи с ложными утверждениями, в том числе с формулировкой о рыцарях и лжецах.

№	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	Семинар	Чётность, чередование	Задачи на идеи чётности и чередования. Свойства чётности у чисел. Шахматная раскраска. Домашнее задание по семинару.
2	Семинар	Биекция, разбиение на группы	Применение идеи биекции для сравнения мощности множеств. Различные задачи на идею соответствия. Домашнее задание по семинару.
3	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	Семинар	Инвариант	Понятие инварианта. Примеры построения инвариантных величин в задаче. Акцент на чётности как инварианте. Домашнее задание по семинару.
5	Семинар	Раскраска. Полуинвариант.	Раскраска как инвариант. Различные виды раскрасок. Метод весов (раскраска числами). Понятие полуинварианта. Примеры нахождения полуинвариантов в задаче. Домашнее задание по семинару.
6	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	Семинар	Логика: истина и ложь	Различные задачи с классической формулировкой о «рыцарях и лжецах». Перебор вариантов в задачах с





			истинными и ложными утверждениями. Домашнее задание по семинару.
8	Семинар	Задачи на взвешивания, детекторы и количество информации	Конструктивные задачи на взвешивания. Понятие количества информации в задачах на взвешивание и детекторы. Доказательство минимальности количества действий в задачах на алгоритмы. Домашнее задание по семинару.
9	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	День индивидуальных консультаций	День индивидуальных консультаций	Обсуждение успехов и сложностей в обучении по результатам месяца. Корректировка индивидуального плана обучения в соответствии с потребностями ученика.





Октябрь 2024
года

Тема месяца: теория чисел.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- основные свойства делимости;
- что такое простые и составные числа, как раскладывать числа на простые множители, единственность такого разложения;
- что такое НОД, НОК, как их находить;
- что такое взаимно простые числа, попарно взаимные числа, взаимно простые в совокупности числа, как связаны эти понятия между собой;
- принцип алгоритма Евклида и доказательство его корректности;
- концепцию деления с остатком;
- как работать с остатками отрицательных чисел;
- что такое сравнение по модулю, свойства сравнений;
- формулировки и доказательства признаков делимости;
- идею зацикливания остатков степеней;
- принцип невозможных остатков;
- как корректно осуществить перебор при решении уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- идею перебора остатков для доказательства отсутствия решений уравнения в целых числах;
- основные соображения, позволяющие применить оценки и неравенства в теоретико-числовых задачах;
- содержание и доказательство леммы об арифметической прогрессии;
- понятия полной и приведённой системы вычетов;
- принцип обратимости остатков, существование обратных остатков;





- формулировки и различных доказательства малой теоремы Ферма, теоремы Эйлера, китайской теоремы об остатках, в том числе, как следствий леммы об арифметической прогрессии;

обучающийся **умеет**:

- решать теоретико-числовые задачи на применение базовых свойств делимости;
- использовать свойства сравнений по модулю для решения задач;
- осуществлять полный и эффективный перебор остатков степеней по различным модулям;
- решать уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- использовать признаки делимости в задачах, в том числе и в их общем виде;
- доказывать отсутствие решений у уравнения в целых числах методом перебора остатков;
- использовать основные приёмы оценок и неравенств в теоретико-числовых задачах;
- находить обратные остатки (осуществлять деление в кольце вычетов);
- использовать малую теорему Ферма и теорему Эйлера;
- применять китайскую теорему об остатках в конструктивных задачах;
- строить бесконечные серии решений уравнений в целых числах.

№	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	Семинар	Свойства делимости	Понятие делимости. Простые и составные числа, основная теорема арифметики. Бесконечность количества простых чисел. Каноническое разложение чисел на простые множители. Проверка на простоту, нахождение НОД и НОК. Взаимно простые числа. Доказательство формулы о количестве делителей. Задачи о простых и составных числах. Домашнее задание по семинару
2	Семинар	Сравнения по модулю, перебор остатков	Определения деления с остатком и сравнения по модулю. Свойства сравнений. Применение сравнений





			по модулю для решения задач на остатки. Домашнее задание по семинару
3	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
4	Семинар	Признаки делимости	Доказательство признаков делимости на степени чисел 2 и 5, на числа 3 и 9, на число 11. Общий вид признаков делимости. Решение задач с их помощью. Домашнее задание по семинару
5	Семинар	Уравнения в целых числах	Решение уравнений в целых числах методом разложения на множители и перебора делителей. Доказательство отсутствия решений уравнения в целых числах. Метод перебора остатков. Домашнее задание по семинару
6	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
7	Семинар	Оценки в теории чисел	Применение различных оценок в задачах с целыми числами. Домашнее задание по семинару
8	Семинар	Лемма об арифметической прогрессии. Обратные остатки.	Доказательство и применение леммы об арифметической прогрессии. Полная и приведённая системы вычетов. Обратные остатки. Домашнее задание по семинару
9	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	Семинар	Малая теорема Ферма, теорема Эйлера	Доказательство малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера. Применение в задачах. Домашнее задание по семинару





11	Семинар	Конструкции с целыми числами	Китайская теорема об остатках, её применение в задачах на конструктивы с целыми числами. Построение бесконечных серий решений. Различные задачи на конструктивы с целыми числами. Домашнее задание по семинару
12	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	День индивидуальных консультаций	День индивидуальных консультаций	Обсуждение успехов и сложностей в обучении по результатам месяца. Корректировка индивидуального плана обучения в соответствии с потребностями ученика.





Ноябрь 2024
года

Тема месяца: алгебра.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- принцип выделения полного квадрата;
- доказательство формулы дискриминанта и теоремы Виета для квадратного трёхчлена;
- зависимость вида графика квадратного трёхчлена от значений коэффициентов трёхчлена;
- как доказываются, применяются и зачем нужны формулы сокращённого умножения;
- свойства степеней и корней;
- что такое сопряжённые числа;
- что такое система уравнений, что значит «решить систему уравнений»;
- основные приёмы решения систем уравнений;
- формулировку и доказательство неравенства Коши;
- классические приёмы применения неравенства Коши;
- необходимое направление огрубления в неравенствах для получения доказательства (без нарушения транзитивности в цепочке переходов);

обучающийся **умеет:**

- доказывать неравенства с помощью приёма выделения полного квадрата;
- решать квадратные уравнения с помощью формулы дискриминанта и с помощью теоремы Виета;
- применять теорему Виета и другие распространённые соображения для решения задач на квадратные трёхчлены;
- применять графический подход в алгебраических задачах, использовать принцип непрерывности;
- эффективно раскрывать скобки в алгебраических выражениях;





- уместно применять формулы сокращённого умножения и замечать возможность их применения в нестандартных ситуациях;
- осуществлять преобразования сложных выражений, содержащих степени и корни;
- применять сопряжённые числа в различных задачах;
- решать системы уравнений всеми распространёнными приёмами;
- доказывать неравенства с помощью неравенства Коши;
- уместно применять метод огрубления в неравенствах.

№	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	Семинар	Выделение полного квадрата	Задачи на приём выделения полного квадрата, доказательство неравенств с его помощью. Домашнее задание по семинару.
2	Семинар	Квадратный трёхчлен и теорема Виета	Вывод формулы корней квадратного уравнения, доказательство теоремы Виета двумя способами. Приёмы решения задач на квадратный трёхчлен. Преобразования и теорема Виета. Графический подход. Домашнее задание по семинару.
3	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	Семинар	Формулы сокращённого умножения	Формулы разностей и сумм степеней. Разложение на множители выражений вида $x^2+ax+by$. Различные задачи на применение формул сокращённого умножения. Домашнее задание по семинару.
5	Семинар	Алгебраические преобразования	Интуиция, стоящая за поиском необходимых преобразований алгебраических выражений. Разложение на множители. Различные задачи на





			алгебраические преобразования. Домашнее задание по семинару.
6	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	Семинар	Степени и корни	Свойства степеней с произвольными показателями. Преобразование вложенных корней и сложных выражений с корнями. Применение сопряжённых чисел. Различные задачи на степени и корни. Домашнее задание по семинару.
8	Семинар	Уравнения, неравенства и их системы	Приёмы решения систем уравнений. Сложение и вычитание уравнений. Разложение на множители. Выделение полного квадрата. Использование оценок. Различные задачи на решение систем уравнений и неравенств. Домашнее задание по семинару.
9	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	Семинар	Неравенство Коши	Доказательство неравенства Коши. Классические приёмы применения неравенства Коши для доказательства неравенств с несколькими переменными. Домашнее задание по семинару.
11	Семинар	Метод огрубления в неравенствах	Применение метода огрубления в неравенствах. Метод огрубления совместно с неравенством Коши. Домашнее задание по семинару.
12	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.





13	День индивидуальных консультаций	День индивидуальных консультаций	Обсуждение успехов и сложностей в обучении по результатам месяца. Корректировка индивидуального плана обучения в соответствии с потребностями ученика.
----	----------------------------------	----------------------------------	--





Декабрь 2024 года	Цели месяца:		
	<p>обучающийся понимает:</p> <ul style="list-style-type: none"> • как выглядят графики классических функций; • как преобразуются графики при действиях с функцией и/или аргументом функции; • смысл формулы расстояния между точками и уравнения окружности; • возможные варианты геометрической интерпретации алгебраических выражений; • что такое параметр и задачи с параметром, что значит «решить задачу с параметром»; • содержательный смысл и формальные определения понятия, характеризующих свойства функций, возможные пути применения этих свойств в задачах; • понятие функционального уравнения, возможные подходы к решению функциональных уравнений; <p>обучающийся умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> • строить графики простых и сложных функций (содержательно, с помощью преобразований графиков, а не только по точкам); • грамотно интерпретировать алгебраические выражения геометрически и делать верные выводы из таких интерпретаций; • решать задачи с параметром с помощью координатно-графического подхода; • использовать свойства функций в различных задачах; • решать функциональные уравнения базовыми методами. 		
№	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	<i>Семинар</i>	Графики классических функций	Графики линейной функции, квадратного трёхчлена, обратной пропорциональности, модуля. Задачи на графики. Домашнее задание по семинару.





2	Семинар	Преобразования графиков	Преобразования графиков при изменении функции и при изменении аргумента функции. Построение графиков сложных функций, в том числе дробно-линейной функции. Домашнее задание по семинару.
3	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	Семинар	Расстояние между точками и уравнение окружности	Формула расстояния между точками на координатной плоскости. Уравнение окружности. Алгебраические задачи на применение формулы расстояния между точками и уравнения окружности, в том числе базовые задачи с параметрами. Домашнее задание по семинару.
5	Семинар	Геометрическая интерпретация в алгебре	Различные задачи, решаемые с помощью геометрической интерпретации алгебраических выражений. Домашнее задание по семинару.
6	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	Семинар	Задачи с параметрами-1	Базовые задачи с параметрами, решаемые с помощью координатно-графического подхода. Домашнее задание по семинару.
8	Семинар	Задачи с параметрами-2	Сложные и нестандартные задачи с параметрами, решаемые с применением координатно-графического подхода. Домашнее задание по семинару.
9	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.





10	Семинар	Свойства функций	Свойства функций в различных алгебраических задачах, в том числе с параметрами. Монотонность, ограниченность, выпуклость, периодичность. Домашнее задание по семинару.
11	Семинар	Функциональные уравнения	Понятие функционального уравнения. Приёмы решения функциональных уравнений. Домашнее задание по семинару.
12	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	День индивидуальных консультаций	День индивидуальных консультаций	Обсуждение успехов и сложностей в обучении по результатам месяца. Корректировка индивидуального плана обучения в соответствии с потребностями ученика.

