



## Программа занятий Школы АПО по математике в 2023–2024 учебном году

### 8-9 классы

Сентябрь 2023 года

**Тема месяца:** методы рассуждений и логика.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- концепцию чётности и принцип чередования;
- идею биекции для сравнения мощности множеств;
- что такое инвариант процесса и возможности применения инвариантов в задачах на доказательство;
- понятие полуинварианта и возможности применения полуинвариантов в задачах;
- как различные раскраски клетчатой плоскости могут помочь в задачах на доказательство;
- что значит «гарантированно» выполнить что-либо в математических задачах на алгоритмы;
- концепцию количества информации;
- как рационально осуществляется перебор в логических задачах с истинными и ложными утверждениями;

обучающийся **умеет:**

- применять идеи чётности и чередования;
- использовать принцип разбиения на пары и группы в различных задачах;
- решать задачи с помощью идеи поиска инварианта;
- решать задачи на клетчатой плоскости методом раскраски;
- применять полуинварианты в задачах;





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
					<ul style="list-style-type: none"><li>• конструировать алгоритмы в задачах на взвешивания;</li><li>• доказывать минимальность количества операций для гарантированного осуществления необходимого результата в алгоритмических задачах;</li><li>• решать логические задачи с ложными утверждениями, в том числе с формулировкой о рыцарях и лжецах.</li></ul>
1	11.09	19:00	Семинар	Чётность, чередование	Задачи на идеи чётности и чередования. Свойства чётности у чисел. Шахматная раскраска. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
2	13.09	19:00	Семинар	Биекция, разбиение на группы	Применение идеи биекции для сравнения мощности множеств. Различные задачи на идею соответствия. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	15.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	18.09	19:00	Семинар	Инвариант	Понятие инварианта. Примеры построения инвариантных величин в задаче. Акцент на чётности как инварианте. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
5	20.09	19:00	Семинар	Раскраска. Полуинвариант.	Раскраска как инвариант. Различные виды раскрасок. Метод весов (раскраска числами). Понятие полуинварианта. Примеры нахождения полуинвариантов в задаче. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	22.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.





7	25.09	19:00	Семинар	Логика: истина и ложь	Различные задачи с классической формулировкой о «рыцарях и лжецах». Перебор вариантов в задачах с истинными и ложными утверждениями. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	27.09	19:00	Семинар	Задачи на взвешивания, детекторы и количество информации	Конструктивные задачи на взвешивания. Понятие количества информации в задачах на взвешивание и детекторы. Доказательство минимальности количества действий в задачах на алгоритмы. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
9	29.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	30.09	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		
11	По согласованию	15:00-23:00	Собеседования		

**Материалы методического сопровождения:**

- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Главы «Чётность», «Инвариант».
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Чётность», «Подсчёт двумя способами», «Соответствие», «Инварианты», «Раскраски», «Процессы и операции».
- Баранов В. Н., Баранова О. В. Элементы дискретной математики. Метод раскраски. Принцип Дирихле.
- Медников Л. Э. Чётность.
- Богомолова О. Б. Логические задачи.
- Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы. От головоломок к задачам.





- *Раскина И. В., Шноль Д. Э. Логические задачи.*
- *Раскина И. В. Логика для всех: от пиратов до мудрецов.*
- *Журнал «Квант», 2015, №3. Кузнецов Д. Ю. «О методе раскраски на примере одной задачи».*





Октябрь 2023 года

**Тема месяца:** теория чисел.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- основные свойства делимости;
- что такое простые и составные числа, как раскладывать числа на простые множители, единственность такого разложения;
- что такое НОД, НОК, как их находить;
- что такое взаимно простые числа, попарно взаимные числа, взаимно простые в совокупности числа, как связаны эти понятия между собой;
- принцип алгоритма Евклида и доказательство его корректности;
- концепцию деления с остатком;
- как работать с остатками отрицательных чисел;
- что такое сравнение по модулю, свойства сравнений;
- формулировки и доказательства признаков делимости;
- идею закливания остатков степеней;
- принцип невозможных остатков;
- как корректно осуществить перебор при решении уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- идею перебора остатков для доказательства отсутствия решений уравнения в целых числах;
- основные соображения, позволяющие применить оценки и неравенства в теоретико-числовых задачах;
- содержание и доказательство леммы об арифметической прогрессии;
- понятия полной и приведённой системы вычетов;
- принцип обратимости остатков, существование обратных остатков;





- формулировки и различных доказательства малой теоремы Ферма, теоремы Эйлера, китайской теоремы об остатках, в том числе, как следствий леммы об арифметической прогрессии;

обучающийся **умеет**:

- решать теоретико-числовые задачи на применение базовых свойств делимости;
- использовать свойства сравнений по модулю для решения задач;
- осуществлять полный и эффективный перебор остатков степеней по различным модулям;
- решать уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- использовать признаки делимости в задачах, в том числе и в их общем виде;
- доказывать отсутствие решений у уравнения в целых числах методом перебора остатков;
- использовать основные приёмы оценок и неравенств в теоретико-числовых задачах;
- находить обратные остатки (осуществлять деление в кольце вычетов);
- использовать малую теорему Ферма и теорему Эйлера;
- применять китайскую теорему об остатках в конструктивных задачах;
- строить бесконечные серии решений уравнений в целых числах.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	02.10	19:00	Семинар	Свойства делимости	Понятие делимости. Простые и составные числа, основная теорема арифметики. Бесконечность количества простых чисел. Каноническое разложение чисел на простые множители. Проверка на простоту, нахождение НОД и НОК. Взаимно простые числа. Доказательство формулы о количестве делителей. Задачи о простых и





					составных числах. <b>Домашнее задание</b> по семинару
2	04.10	19:00	Семинар	Сравнения по модулю, перебор остатков	Определения деления с остатком и сравнения по модулю. Свойства сравнений. Применение сравнений по модулю для решения задач на остатки. <b>Домашнее задание</b> по семинару
3	06.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
4	09.10	19:00	Семинар	Признаки делимости	Доказательство признаков делимости на степени чисел 2 и 5, на числа 3 и 9, на число 11. Общий вид признаков делимости. Решение задач с их помощью. <b>Домашнее задание</b> по семинару
5	11.10	19:00	Семинар	Уравнения в целых числах	Решение уравнений в целых числах методом разложения на множители и перебора делителей. Доказательство отсутствия решений уравнения в целых числах. Метод перебора остатков. <b>Домашнее задание</b> по семинару
6	13.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
7	16.10	19:00	Семинар	Оценки в теории чисел	Применение различных оценок в задачах с целыми числами. <b>Домашнее задание</b> по семинару
8	18.10	19:00	Семинар	Лемма об арифметической прогрессии. Обратные остатки.	Доказательство и применение леммы об арифметической прогрессии. Полная и





					приведённая системы вычетов. Обратные остатки. <b>Домашнее задание</b> по семинару
9	20.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	23.10	19:00	Семинар	Малая теорема Ферма, теорема Эйлера	Доказательство малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера. Применение в задачах. <b>Домашнее задание</b> по семинару
11	25.10	19:00	Семинар	Конструкции с целыми числами	Китайская теорема об остатках, её применение в задачах на конструктивы с целыми числами. Построение бесконечных серий решений. Различные задачи на конструктивы с целыми числами. <b>Домашнее задание</b> по семинару
12	27.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	28.10	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Главы «Делимость и остатки», «Делимость-2», «Системы счисления».
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Делимость и остатки», «Алгоритм Евклида».
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. Главы 3, 4.
- Сгибнев А. И. Делимость и простые числа.





- *Вавилов В. В. Многоликий алгоритм Евклида.*
- *Журнал «Квант», 2000, №1 и №3. Сендеров В. А., Спивак А. В. «Малая теорема Ферма».*
- *Журнал «Квант», 1997, №3. Флейшман Д. «Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова».*
- *Khurmi A. Modern Olympiad Number Theory. Главы 1, 2, 4, 9.*
- *Stevens J. Olympiad Number Theory Through Challenging Problems. Главы 1, 2, 4.*





Ноябрь 2023 года

**Тема месяца:** алгебра.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- принцип выделения полного квадрата;
- доказательство формулы дискриминанта и теоремы Виета для квадратного трёхчлена;
- зависимость вида графика квадратного трёхчлена от значений коэффициентов трёхчлена;
- как доказываются, применяются и зачем нужны формулы сокращённого умножения;
- свойства степеней и корней;
- что такое сопряжённые числа;
- что такое система уравнений, что значит «решить систему уравнений»;
- основные приёмы решения систем уравнений;
- формулировку и доказательство неравенства Коши;
- классические приёмы применения неравенства Коши;
- необходимое направление огрубления в неравенствах для получения доказательства (без нарушения транзитивности в цепочке переходов);

обучающийся **умеет:**

- доказывать неравенства с помощью приёма выделения полного квадрата;
- решать квадратные уравнения с помощью формулы дискриминанта и с помощью теоремы Виета;
- применять теорему Виета и другие распространённые соображения для решения задач на квадратные трёхчлены;





- применять графический подход в алгебраических задачах, использовать принцип непрерывности;
- эффективно раскрывать скобки в алгебраических выражениях;
- уместно применять формулы сокращённого умножения и замечать возможность их применения в нестандартных ситуациях;
- осуществлять преобразования сложных выражений, содержащих степени и корни;
- применять сопряжённые числа в различных задачах;
- решать системы уравнений всеми распространёнными приёмами;
- доказывать неравенства с помощью неравенства Коши;
- уместно применять метод округления в неравенствах.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	30.10	19:00	Семинар	Выделение полного квадрата	Задачи на приём выделения полного квадрата, доказательство неравенств с его помощью. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
2	01.11	19:00	Семинар	Квадратный трёхчлен и теорема Виета	Вывод формулы корней квадратного уравнения, доказательство теоремы Виета двумя способами. Приёмы решения задач на квадратный трёхчлен. Преобразования и теорема Виета. Графический подход. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	03.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	06.11	19:00	Семинар	Формулы сокращённого умножения	Формулы разностей и сумм степеней. Разложение на множители выражений вида $xu+ax+by$ . Различные задачи на применение формул сокращённого





					умножения. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
5	08.11	19:00	Семинар	Алгебраические преобразования	Интуиция, стоящая за поиском необходимых преобразований алгебраических выражений. Разложение на множители. Различные задачи на алгебраические преобразования. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	10.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	13.11	19:00	Семинар	Степени и корни	Свойства степеней с произвольными показателями. Преобразование вложенных корней и сложных выражений с корнями. Применение сопряжённых чисел. Различные задачи на степени и корни. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	15.11	19:00	Семинар	Уравнения, неравенства и их системы	Приёмы решения систем уравнений. Сложение и вычитание уравнений. Разложение на множители. Выделение полного квадрата. Использование оценок. Различные задачи на решение систем уравнений и неравенств. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
9	17.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	20.11	19:00	Семинар	Неравенство Коши	Доказательство неравенства Коши. Классические приёмы применения неравенства Коши для доказательства





					неравенств с несколькими переменными. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
11	22.11	19:00	Семинар	Метод огрубления в неравенствах	Применение метода огрубления в неравенствах. Метод огрубления совместно с неравенством Коши. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
12	24.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	25.11	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. Главы 2, 5, 6, 8.
- Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Стр. 148-177.
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. Главы 6, 9, 10.
- Седракян Н. М., Авоян А. М. Неравенства. Методы доказательства. Главы 1 и 3.





Декабрь 2023 года

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- как выглядят графики классических функций;
- как преобразуются графики при действиях с функцией и/или аргументом функции;
- смысл формулы расстояния между точками и уравнения окружности;
- возможные варианты геометрической интерпретации алгебраических выражений;
- что такое параметр и задачи с параметром, что значит «решить задачу с параметром»;
- содержательный смысл и формальные определения понятия, характеризующих свойства функций, возможные пути применения этих свойств в задачах;
- понятие функционального уравнения, возможные подходы к решению функциональных уравнений;

обучающийся **умеет:**

- строить графики простых и сложных функций (содержательно, с помощью преобразований графиков, а не только по точкам);
- грамотно интерпретировать алгебраические выражения геометрически и делать верные выводы из таких интерпретаций;
- решать задачи с параметром с помощью координатно-графического подхода;
- использовать свойства функций в различных задачах;
- решать функциональные уравнения базовыми методами.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	27.11	19:00	Семинар	Графики классических функций	Графики линейной функции, квадратного трёхчлена, обратной пропорциональности, модуля. Задачи на графики. <b>Домашнее задание</b> по семинару.





2	29.11	19:00	Семинар	Преобразования графиков	Преобразования графиков при изменении функции и при изменении аргумента функции. Построение графиков сложных функций, в том числе дробно-линейной функции. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	01.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	04.12	19:00	Семинар	Расстояние между точками и уравнение окружности	Формула расстояния между точками на координатной плоскости. Уравнение окружности. Алгебраические задачи на применение формулы расстояния между точками и уравнения окружности, в том числе базовые задачи с параметрами. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
5	06.12	19:00	Семинар	Геометрическая интерпретация в алгебре	Различные задачи, решаемые с помощью геометрической интерпретации алгебраических выражений. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	08.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	11.12	19:00	Семинар	Задачи с параметрами-1	Базовые задачи с параметрами, решаемые с помощью координатно-графического подхода. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	13.12	19:00	Семинар	Задачи с параметрами-2	Сложные и нестандартные задачи с параметрами, решаемые с





9	15.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	применением координатно-графического подхода. <b>Домашнее задание</b> по семинару. Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	18.12	19:00	Семинар	Свойства функций	Свойства функций в различных алгебраических задачах, в том числе с параметрами. Монотонность, ограниченность, выпуклость, периодичность. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
11	20.12	19:00	Семинар	Функциональные уравнения	Понятие функционального уравнения. Приёмы решения функциональных уравнений. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
12	22.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	23.12	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Блинков А. Д. Геометрия в негеометрических задачах.
- Генкин Г. З. Геометрические решения негеометрических задач.
- Козко А. И. и др. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. Главы 12, 14.
- Материалы сайта [imomath.com](https://imomath.com): <https://imomath.com/index.cgi?page=functionalEquations>.





Январь 2023 года

**Тема месяца:** классическая планиметрия.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- теорему Фалеса и сущностный смысл теоремы о пропорциональных отрезках (инвариантность простого отношения отрезков при параллельном проектировании);
- свойство ряда равных отношений;
- свойство биссектрисы треугольника (с доказательством);
- как соотносятся площади треугольников с общей высотой, общим основанием, общим углом;
- принцип применения приёма «рельсы Евклида»;
- формулировки, различные доказательства и возможные пути применения теорем Чебы и Менелая;
- содержательный смысл и доказательства теорем об углах, связанных с окружностью;
- понятие степени точки относительно окружности;
- доказательство критерия описанного четырёхугольника и нестандартных критериев описанности;
- концепцию радикальной оси двух окружностей и радикального центра трёх окружностей;

обучающийся **умеет:**

- грамотно применять теорему о пропорциональных отрезках (совместно со свойством ряда равных отношений);
- применять свойство биссектрисы треугольника, находить длины отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону;





- эффективно использовать дополнительное построение «проведение параллельной палочки»;
- решать задачи на поиск отношений, в которых делят друг друга отрезки;
- решать задачи на отношение площадей треугольников;
- содержательно использовать приём «рельсы Евклида»;
- доказывать конкурентность прямых с помощью теоремы Чевы;
- доказывать коллинеарность точек с помощью теоремы Менелая;
- применять теоремы Чевы и Менелая в геометрических задачах на вычисление;
- решать задачи на применение свойств углов, связанных с окружностью;
- видеть на чертеже вписанные четырёхугольники, использовать вспомогательные окружности;
- использовать различные выражения для степени точки относительно окружности;
- применять критерий описанного четырёхугольника и нестандартные критерии описанности;
- использовать в задачах свойства радикальных осей и радикального центра трёх окружностей.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	08.01	19:00	Семинар	Теорема Фалеса и пропорциональные отрезки	Теорема о пропорциональных отрезках. Свойство биссектрисы треугольника. Отношение площадей треугольников с общей высотой, с общей стороной, с общим углом. Дополнительное построение «провести параллельную». Различные задачи на отношения отрезков и площадей. <b>Домашнее задание</b> по семинару.





2	10.01	19:00	Семинар	Теоремы Чевы и Менелая	Доказательства теорем Чевы и Менелая с помощью подобия и с помощью площадей. Применение теорем в задачах на доказательство и в счётных задачах. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	12.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	15.01	19:00	Семинар	Углы, связанные с окружностью. Вписанные четырёхугольники.	Вписанный и центральный угол, углы между хордами, секущими. Два критерия вписанности четырёхугольников через углы. Решение простейших задач на свойства углов, связанных с окружностью. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
5	17.01	19:00	Семинар	Касательные	Угол между хордой и касательной. Задачи на касание окружности и прямой. Задачи на касание двух окружностей. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	19.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	22.01	19:00	Семинар	Окружность и отрезки. Степень точки.	Свойства произведений отрезков хорд и секущих в окружности. Критерии вписанности четырёхугольника через произведения отрезков. Понятие степени точки относительно окружности. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	24.01	19:00	Семинар	Описанные многоугольники	Свойства и признаки описанных четырёхугольников и многоугольников. Задачи на вписанные окружности и





					описанные многоугольники. Нестандартные критерии описанности. <b>Домашнее задание</b> по семинару
9	26.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	29.01	19:00	Семинар	Вспомогательная окружность	Задачи повышенной сложности, решаемые с помощью введения вспомогательной окружности. <b>Домашнее задание</b> по семинару
11	31.01	19:00	Семинар	Радикальная ось и радикальный центр. Применение свойств радикальных осей в задачах.	Принцип Карно. Понятие радикальной оси двух окружностей и радикального центра трёх окружностей. Построение радикальной оси двух окружностей. Применение свойств радикальных осей в задачах. <b>Домашнее задание</b> по семинару
12	02.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	03.02	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Блинков Ю. А. Горская А. С. Вписанные углы.
- Волчкевич М. А. Уроки геометрии в задачах, 7-8 классы. Стр. 110-111, 140-160.
- Шень А. Геометрия в задачах. Стр. 110-150.
- Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. Стр. 134-151.





- Понарин Я. П. *Элементарная геометрия. Том 1. Главы 1, 2, 7, 9, 16.*
- Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии. Главы 2, 3.*





Февраль 2023 года

**Тема месяца:** текстовые задачи и методы рассуждений.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- что такое математическая модель задачи и что значит «составить математическую модель задачи»;
- концепцию средней скорости;
- какие бывают виды относительного движения двух объектов;
- относительность движения;
- связь между характеристиками движения объекта и внешним видом графика движения;
- как составлять математические модели задач с движением объектов по кругу;
- как составлять математические модели задач с движением объектов по эскалатору;
- понятие производительности;
- понятие простого и сложного процента;
- различие дифференцированных и аннуитетных платежей, методы решения задач на эти виды платежей;
- концепцию спроса и предложения, понятие прибыли и принцип её максимизации;
- значение принципа крайнего для решения широкого круга задач;
- суть метода спуска;
- содержание метода математической индукции;
- возможные проблемы с логикой решения при применении метода математической индукции;

обучающийся **умеет:**

- составлять математические модели в задачах на движение и совместную работу;





- изображать и использовать графики движения объектов;
- решать задачи на проценты, вклады и кредиты;
- применять различные подходы в задачах на оптимизацию;
- применять свойства делимости и различные оценки при исследовании математических моделей текстовых задач;
- работать с упорядоченными наборами чисел;
- эффективно применять принцип крайнего в различных задачах;
- работать с методом бесконечного спуска;
- доказывать утверждения из различных разделов математики методом математической индукции.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	05.02	19:00	Семинар	Задачи на движение и совместную работу	Составление математической модели задачи. Грамотное введение переменных. Понятие средней скорости. Понятие производительности. Решение стандартных задач на движение и на совместную работу. <b>Домашнее задание по семинару</b>
2	07.02	19:00	Семинар	Нестандартные задачи на движение и совместную работу	Графический подход в задачах на движение. Задачи на движение с дополнительными условиями: по реке, по эскалатору, по кругу. Сложные и нестандартные задачи на движение и совместную работу. <b>Домашнее задание по семинару</b>
3	09.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы





4	12.02	19:00	Семинар	Задачи с экономическим содержанием	Задачи на проценты, вклады и кредиты. Простой и сложный процент, дифференцированные и аннуитетные платежи. <b>Домашнее задание</b> по семинару
5	14.02	19:00	Семинар	Задачи на оптимизацию	Текстовые задачи на оптимизацию. Применение свойств квадратичной функции в задачах на оптимизацию. Неравенство Коши в задачах на оптимизацию. <b>Домашнее задание</b> по семинару
6	16.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
7	19.02	19:00	Семинар	Текстовые задачи на делимость	Текстовые задачи, в решении которых используются свойства целых чисел, делимость и остатки. <b>Домашнее задание</b> по семинару
8	21.02	19:00	Семинар	Текстовые задачи на неравенства	Текстовые задачи, в решении которых используются неравенства в общем виде, а также неравенства, основанные на свойствах целых чисел. <b>Домашнее задание</b> по семинару
9	23.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	26.02	19:00	Семинар	Упорядочивание и принцип крайнего. Метод спуска.	Задачи, требующие применения идеи упорядочивания либо принципа крайнего. Метод спуска. <b>Домашнее задание</b> по семинару





11	28.02	19:00	Семинар	Метод математической индукции	Понятие метода математической индукции. Применение метода математической индукции в задачах на доказательство тождеств, при доказательстве неравенств, задачах на делимость и в различных дискретных задачах. <b>Домашнее задание</b> по семинару
12	01.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	02.03	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. Стр. 200-217.
- Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Стр. 178-220.
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. Глава 1.
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Метод крайнего», «Индукция».
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Глава «Индукция».
- Шень А. Математическая индукция.
- Engel A. Problem-Solving Strategies. Главы 3, 8.





Март 2023 года

**Тема месяца:** дискретные задачи.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- правила суммы и произведения в комбинаторике;
- различия между перестановками, размещениями (без повторений и с повторениями) и сочетаниями;
- вид формул для перестановок, размещений (без повторений и с повторениями) и сочетаний, вывод этих формул;
- принцип дополнения в комбинаторике;
- суть метода шаров и перегородок;
- доказательства тождеств для чисел сочетаний различными методами, их комбинаторную суть;
- связь комбинаторных тождеств и треугольника Паскаля;
- что такое однокруговой, двухкруговой турнир и турнир по олимпийской системе;
- что такое «правильная игра» с математической точки зрения;
- принцип симметричной стратегии в математической игре;
- концепцию анализа с конца в позиционных играх.
- основные понятия теории графов;
- концепцию дерева и минимальной связности в графе;
- понятие эйлеровости графа, критерий эйлеровости (с доказательством);
- понятие гамильтоновости графа;
- концепцию ориентированного графа;
- понятие петель и кратных рёбер в графе;
- основные приёмы организации процессов в графах;





обучающийся **умеет**:

- корректно применять правила суммы и произведения в комбинаторике;
- работать со сложными выражениями, содержащими факториалы;
- грамотно применять формулы перестановок, размещений (с повторениями и без повторений) и сочетаний в задачах на подсчёт количества вариантов;
- уместно применять метод шаров и перегородок;
- применять основные приёмы решения задач на турниры;
- придумывать выигрышную стратегию за одного из игроков в математических играх;
- строго доказывать, что некоторая стратегия игрока в математической игре действительно является победной;
- решать различные задачи на конструирование алгоритмов и процессов.
- переводить задачу на язык теории графов и корректно применять специальную терминологию теории графов;
- решать задачи на свойства деревьев и выделение остовного дерева в графе;
- использовать критерий эйлеровости графа;
- доказывать отсутствие гамильтоновости графа различными способами;
- применять концепции ориентированных графов, петель и кратных рёбер в графе;
- использовать приёмы организации процессов в графах.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	04.03	19:00	Семинар	Перестановки, размещения, сочетания	Правила суммы и произведения: аналогия с логическими «И», «ИЛИ». Вывод формул для перестановок и размещений. Размещения с повторениями, задачи о двоичных кодах, о количестве подмножеств. Отработка навыков работы с факториалами. Вывод формулы числа сочетаний. Отработка применения





					формулы в числах. Доказательство тождеств с биномиальными коэффициентами: алгебраически и комбинаторно. Треугольник Паскаля. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
2	06.03	19:00	Семинар	Перечислительная комбинаторика	Отработка навыка проведения перебора в комбинаторных задачах, разбиение на случаи. Метод шаров и перегородок. Различные задачи на подсчёт числа вариантов. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	08.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	11.03	19:00	Семинар	Турниры	Различные задачи на проведение турниров по круговой системе. Задачи на турниры по олимпийской системе. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
5	13.03	19:00	Семинар	Игры и стратегии	Понятие «правильной игры». Симметричные стратегии и стратегия дополнения. Игры-шутки. Понятие выигрышных и проигрышных позиций. Анализ с конца в задачах на игры и стратегии. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	15.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	18.03	19:00	Семинар	Введение в теорию графов	Понятие графа. Определения в теории графов. Простейшие задачи на графы.





					Чётность числа нечётных вершин. Изоморфность графов. Существование графов с заданными свойствами. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	20.03	19:00	Семинар	Минимальная связность	Понятие дерева. Задачи на связь количества вершин и рёбер в дереве, задачи на выделение остовного дерева. Формула Эйлера для плоских графов. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
9	22.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	25.03	19:00	Семинар	Обходы графов	Эйлеровость и гамильтоновость графов. Критерий эйлеровости. Задачи на обход графов. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
11	27.03	19:00	Семинар	Процессы в графах	Применение метода математической индукции в задачах теории графов. Организация процессов на графах. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
12	29.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	30.03	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

**Материалы методического сопровождения:**

- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Графы», «Игры».





- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Главы «Комбинаторика-1», «Комбинаторика-2», «Графы-1», «Графы-2», «Игры».
- Виленкин Н. Я. Комбинаторика. Главы I, II.
- Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика.
- Заславский А. А., Френкин Б. Р., Шаповалов А. В. Задачи о турнирах.
- Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики.
- Гуровиц В. М. Ховрина В. В. Графы.
- Оре О. Графы и их применение.





Апрель 2023 года

**Тема месяца:** «оценка+пример» и конструктивы.

**Цели месяца:**

обучающийся **понимает:**

- основные приёмы решения числовых ребусов;
- понятия примера и контрпримера;
- когда приведение примера или контрпримера является полным решением задачи, а когда не является;
- глобальные идеи, полезные в задачах на конструирование объектов с заданными свойствами;
- варианты применения принципа «узких мест»;
- значимость наличия как «оценки», так и «примера» в задачах типа «оценка+пример»;
- какие рассуждения могут считаться строгими доказательствами оценки в задачах типа «оценка+пример», а какие – нет;
- основные приёмы решения задач типа «оценка+пример» на клетчатых досках;





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
					обучающийся <b>умеет</b> : <ul style="list-style-type: none"><li>• решать числовые ребусы;</li><li>• конструировать числовые и геометрические объекты с заданными свойствами;</li><li>• применять классические приёмы доказательства оценки в задачах типа «оценка+пример» на клетчатых досках;</li><li>• придумывать нестандартные ходы для доказательства оценки в задачах типа «оценка+пример» с различной тематикой.</li></ul>
1	01.04	19:00	Семинар	Числовые ребусы	Задачи на решение математических ребусов и головоломок, построенных на принципе шифра замены. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
2	03.04	19:00	Семинар	Целочисленные конструкции	Различные задачи на конструирование примеров с целыми числами. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
3	05.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	08.04	19:00	Семинар	Оценка+пример на клетчатых досках-1	Введение в задачи типа оценка+пример. Значение как построения примера, так и доказательства оценки в подобных задачах. Техники и полезные соображения при построении примера. Полезные соображения при решении задач типа оценка+пример, сформулированных на клетчатых досках. Разбиение на части. <b>Домашнее задание</b> по семинару.





5	10.04	19:00	Семинар	Оценка+пример на клетчатых досках-2	Полезные соображения при решении задач типа оценка+пример, сформулированных на клетчатых досках. Применение узлов, стенок. Метод выделенных множеств. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
6	12.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	15.04	19:00	Семинар	Геометрические конструкции	Задачи на конструирование геометрических конструкций с необходимыми свойствами. <b>Домашнее задание</b> по семинару.
8	17.04	19:00	Семинар	Пространственные конструкции	Задачи на конструирование геометрических конструкций в пространстве с необходимыми свойствами. <b>Домашнее задание</b> по семинару
9	19.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	22.04	19:00	Семинар	Оценка+пример: числа	Задачи типа оценка+пример из теории чисел и алгебры. <b>Домашнее задание</b> по семинару
11	24.04	19:00	Семинар	Оценка+пример: разное	Нестандартные задачи типа оценка+пример из различных разделов. <b>Домашнее задание</b> по семинару
12	26.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы





13	27.04	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций	
----	-------	-------------	--	--

**Материалы методического сопровождения:**

- Шаповалов А. В. Как построить пример?
- Шаповалов А. В. Математические конструкции: от хижин к дворцам.
- Шаповалов А. В. Принцип узких мест.

