



Программа занятий Школы АПО по математике в 2023–2024 учебном году

10-11 классы

Сентябрь 2023 года

Тема месяца: тригонометрия.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- как определяются тригонометрические функции;
- доказательства корректности основных тригонометрических формул;
- приёмы преобразования в тригонометрических выражениях;
- как определяются обратные тригонометрические функции;
- процесс отбора корней тригонометрических уравнений, неравенств и систем;

обучающийся **умеет:**

- работать с тригонометрической окружностью;
- решать простейшие тригонометрические уравнения;
- выводить все основные тригонометрические формулы;
- строить графики тригонометрических функций и обратных тригонометрических функций;
- осуществлять преобразования тригонометрических выражений;
- применять все основные приёмы решения тригонометрических уравнений;
- осуществлять отбор корней тригонометрических уравнений и неравенств как графически, так и аналитически;
- решать системы тригонометрических уравнений;
- работать с обратными тригонометрическими функциями;
- решать тригонометрические неравенства.





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	11.09	19:00	Семинар	Основные тригонометрические формулы	Определения, свойства и графики тригонометрических функций. Основные формулы тригонометрии. Способы их вывести и запомнить. Применение формул в задачах на тригонометрические преобразования. Домашнее задание по семинару.
2	13.09	19:00	Семинар	Продвинутое тригонометрические формулы и преобразования	Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Отработка навыков тригонометрических преобразований, нестандартные приёмы преобразования тригонометрических выражений. Домашнее задание по семинару.
3	15.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	18.09	19:00	Семинар	Тригонометрические уравнения: основные методы	Основные методы решения тригонометрических уравнений. Разложение на множители, сведение к квадратным, однородные уравнения. Домашнее задание по семинару.
5	20.09	19:00	Семинар	Тригонометрические уравнения: продвинутые методы	Основные методы решения тригонометрических уравнений. Метод вспомогательного аргумента, преобразование сумм в произведения, преобразование произведений в сумму,





					метод оценок. Возможные сложности при отборе корней и при объединении и пересечении решений совокупностей и систем тригонометрических уравнений. Домашнее задание по семинару.
6	22.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	25.09	19:00	Семинар	Обратные тригонометрические функции	Определения, свойства и графики обратных тригонометрических функций. Преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Задачи на обратные тригонометрические функции, в том числе задачи с параметрами. Домашнее задание по семинару.
8	27.09	19:00	Семинар	Тригонометрия и неравенства	Исследование тригонометрических функций. Экстремальные и минимаксные задачи в тригонометрии. Тригонометрические неравенства и системы неравенств, в том числе оценки значений тригонометрических функций от конкретных чисел. Домашнее задание по семинару.
9	29.09	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	30.09	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		





11	По согласов анию	15:00-23:00	Собеседования		
----	------------------------	-------------	---------------	--	--

Материалы методического сопровождения:

- Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. Главы 4-7.
- Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Глава 1.
- Сборник задач по математике для поступающих во втузы под редакцией Сканави М. И. Главы 3, 8, 12.
- Фалин Г. И., Фалин А. И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ.





Октябрь 2023 года

Тема месяца: алгебра.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- основные свойства многочленов;
- доказательства основных теорем, связанных с многочленами;
- определения и свойства степенной, показательной, логарифмической функций;
- вид графиков степенной, показательной, логарифмической функций;
- вывод формул сокращённого умножения;
- суть и доказательство теоремы Виета;
- что из себя представляют элементарные симметрические многочлены и как можно использовать их в задачах;
- понятие орбиты одночлена;
- концепцию антисимметрического многочлена;

обучающийся **умеет:**

- решать задачи на квадратный трёхчлен как алгебраически, так и графически;
- применять свойства многочленов и основные связанные с ними теоремы для решения задач;
- преобразовывать выражения, содержащие рациональные степени и корни;
- решать показательные уравнения и неравенства;
- преобразовывать логарифмические выражения;
- решать логарифмические уравнения, неравенства и системы;
- применять формулы сокращённого умножения;





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
					<ul style="list-style-type: none"> использовать элементарные симметрические многочлены и теорему Виета для многочленов высших степеней при решении задач, а также антисимметрические многочлены; использовать понятия орбиты одночлена.
1	02.10	19:00	Семинар	Квадратный трёхчлен и теорема Виета	Вывод формулы корней квадратного уравнения, доказательство теоремы Виета двумя способами. Приёмы решения задач на квадратный трёхчлен. Преобразования и теорема Виета. Графический подход. Домашнее задание по семинару.
2	04.10	19:00	Семинар	Многочлены	Теорема Безу. Поиск рациональных корней многочленов, разложение многочленов на множители. Различные задачи на свойства многочленов. Домашнее задание по семинару.
3	06.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам Степенная функция	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	09.10	19:00	Семинар		Свойства и график степенной функции. Свойства многочленов. Работа с корнями, в том числе со вложенными. Уравнения и неравенства со степенными функциями и корнями. Домашнее задание по семинару.
5	11.10	19:00	Семинар	Показательная функция	Свойства и график показательной функции. Показательные уравнения и





					неравенства. Домашнее задание по семинару.
6	13.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	16.10	19:00	Семинар	Логарифмы	Свойства и график логарифмической функции. Свойства логарифмов и преобразование логарифмических выражений с их помощью. Домашнее задание по семинару.
8	18.10	19:00	Семинар	Логарифмические уравнения и неравенства	Приёмы решения логарифмических уравнений и неравенств. Уравнения и неравенства с постоянным основанием логарифма. Уравнения и неравенства с переменным основанием логарифма. Метод рационализации. Домашнее задание по семинару.
9	20.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	23.10	19:00	Семинар	Формулы сокращённого умножения и преобразования	Умное раскрытие скобок и разложение многочленов на множители, метод неопределённых коэффициентов. Формулы разностей и сумм степеней. Разложение на множители выражений вида $x^2+ax+by$. Выделение полного квадрата. Различные задачи на применение формул сокращённого умножения. Интуиция, стоящая за поиском необходимых преобразований





					алгебраических выражений. Различные задачи на алгебраические преобразования. Домашнее задание по семинару.
11	25.10	19:00	Семинар	Теорема Виета и симметрические многочлены	Понятие симметрического многочлена. Теорема Виета для многочленов высших степеней. Симметрическая замена в системах уравнений. Антисимметрические многочлены. Орбиты многочленов. Домашнее задание по семинару.
12	27.10	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	28.10	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. Главы 1-3, 5, 6-7.
- Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Главы 2, 3, 5.
- Сборник задач по математике для поступающих во втузы под редакцией Сканави М. И. Главы 2, 6, 7, 9.
- Фалин Г. И., Фалин А. И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. Главы 1-4, 10.
- Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре.
- Прасолов В. В. Многочлены.
- Болотин А. С., Герман И. В. Многочлены в задачах повышенной сложности.
- Белый Е. К. Симметрические уравнения: учебное пособие для учащихся средних школ.





Ноябрь 2023 года

Тема месяца: параметры.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- формулу расстояния между точками и уравнение окружности;
- как видоизменяются графики функций при преобразованиях функции или аргумента;
- как видоизменяются графики уравнений от двух переменных при действиях с переменными;
- как применяется плоскость xOa в задачах с параметрами и когда необходимо использовать её, а когда – плоскость xOy ;
- в чём заключается применение метода областей в задачах с параметрами;
- как определять касание графиков с помощью анализа количества решений уравнения;
- как определять касание графиков с помощью производной;
- алгебраические техники решения задач с параметрами;
- принцип симметрии в задачах с параметрами;
- основные понятия, описывающие свойства функций, их применение в задачах с параметрами;

обучающийся **умеет:**

- осуществлять геометрическую интерпретацию алгебраических выражений с помощью уравнения окружности и формулы расстояния между точками;





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
					<ul style="list-style-type: none"> • строить графики функций и уравнений с помощью правил преобразования графиков; • решать задачи с параметрами на плоскости xOy, используя движения графиков; • решать задачи с параметрами на плоскости xOa; • применять метод областей в задачах с параметрами; • решать задачи с параметрами алгебраически; • решать задачи с параметрами, используя свойства функций; • применять идею симметрии в задачах с параметрами, требующими поиска значений параметров, дающих фиксированное количество корней.
1	30.10	19:00	Семинар	Расстояние между точками и уравнение окружности	Формула расстояния между точками на координатной плоскости. Уравнение окружности. Алгебраические задачи на применение формулы расстояния между точками и уравнения окружности, в том числе с параметрами. Домашнее задание по семинару.
2	01.11	19:00	Семинар	Преобразования графиков и ГМТ на координатной плоскости	Свойства и построение графиков линейной функции, модуля, квадратного трёхчлена, корня, обратной пропорциональности, степенной функции, показательной функции, логарифма. Построение геометрических мест точек на координатной плоскости, заданных аналитически. Преобразования графиков при изменении функции и/или аргумента функции. Преобразования ГМТ,





					заданных аналитически, при действиях с координатами точек. Домашнее задание по семинару.
3	03.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	06.11	19:00	Семинар	Параметры и графики-1	Решение различных задач с параметрами с помощью координатно-графического подхода. Задачи на применение плоскости xOy . Задачи на применение плоскости xOz . Домашнее задание по семинару.
5	08.11	19:00	Семинар	Метод областей	Метод областей (двумерный метод интервалов) в задачах с параметрами. Домашнее задание по семинару.
6	10.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	13.11	19:00	Семинар	Касание графиков	Задачи, требующие поиска положения касания графиков с помощью анализа квадратного трёхчлена. Поиск касания с помощью производной (без доказательства соответствующих формул). Домашнее задание по семинару.
8	15.11	19:00	Семинар	Параметры и графики-2	Решение различных задач с параметрами с помощью координатно-графического подхода. Сложные и нестандартные случаи. Домашнее задание по семинару.
9	17.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.





10	20.11	19:00	Семинар	Алгебраический подход в задачах с параметрами	Различные задачи с параметрами, решаемые без применения координатно-графического подхода. Алгебраический метод решения задач с параметром. Домашнее задание по семинару.
11	22.11	19:00	Семинар	Функциональный подход в задачах с параметрами	Задачи с параметрами, основанные на свойствах функций. Биекция корней (идея симметрии) в задачах с параметрами. Различные нестандартные задачи с параметрами. Домашнее задание по семинару.
12	24.11	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	25.11	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Козко А. И. и др. *Задачи с параметрами: сложные и нестандартные.*
- Шабунин М. И. *Математика для поступающих в вузы. Глава 14.*
- Ткачук В. В. *Математика – абитуриенту. Глава 8.*





Декабрь 2023 года

Цели месяца: планиметрия.

обучающийся **понимает:**

- теорему Фалеса и сущностный смысл теоремы о пропорциональных отрезках (инвариантность простого отношения отрезков при параллельном проектировании);
- свойство ряда равных отношений;
- свойство биссектрисы треугольника (с доказательством);
- как соотносятся площади треугольников с общей высотой, общим основанием, общим углом;
- принцип применения приёма «рельсы Евклида»;
- формулировки, различные доказательства и возможные пути применения теорем Чевы и Менелая;
- содержательный смысл и доказательства теорем об углах, связанных с окружностью;
- понятие степени точки относительно окружности;
- доказательство критерия описанного четырёхугольника и нестандартных критериев описанности;
- концепцию радикальной оси двух окружностей и радикального центра трёх окружностей;
- классические продвинутые факты и теоремы в треугольнике (с доказательствами);
- концепцию вектора и действий с векторами;
- смысл скалярного произведения векторов;
- понятие ГМТ, вид классических ГМТ:





- альтернативное определение биссектрисы, серединного перпендикуляра и окружности как ГМТ с определёнными свойствами;
- характерные признаки, свидетельствующие о рациональности применения тех или иных движений и основанных на них дополнительных построений в задачах.

обучающийся **умеет**:

- грамотно применять теорему о пропорциональных отрезках (совместно со свойством ряда равных отношений);
- применять свойство биссектрисы треугольника, находить длины отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону;
- эффективно использовать дополнительное построение «проведение параллельной палочки»;
- решать задачи на поиск отношений, в которых делят друг друга отрезки;
- решать задачи на отношение площадей треугольников;
- содержательно использовать приём «рельсы Евклида»;
- доказывать конкурентность прямых с помощью теоремы Чевы;
- доказывать коллинеарность точек с помощью теоремы Менелая;
- применять теоремы Чевы и Менелая в геометрических задачах на вычисление;
- решать задачи на применение свойств углов, связанных с окружностью;
- видеть на чертеже вписанные четырёхугольники, использовать вспомогательные окружности;
- использовать различные выражения для степени точки относительно окружности;
- применять критерий описанного четырёхугольника и нестандартные критерии описанности;
- использовать в задачах свойства радикальных осей и радикального центра трёх окружностей;





- распознавать классические геометрические сюжеты в содержательных задачах;
- решать задачи с помощью векторного метода, в том числе с использованием скалярного произведения векторов.
- находить ГМТ с различными свойствами;
- решать задачи, используя метод ГМТ;
- применять движения плоскости для решения задач.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	27.11	19:00	Семинар	Углы, связанные с окружностью	Вписанный и центральный угол, углы между хордами, секущими. Два критерия вписанности четырёхугольников через углы. Решение простейших задач на свойства углов, связанных с окружностью. Угол между хордой и касательной. Задачи на касание окружности и прямой. Задачи на касание двух окружностей. Задачи повышенной сложности, решаемые с помощью введения вспомогательной окружности. Домашнее задание по семинару.
2	29.11	19:00	Семинар	Окружность и отрезки	Свойства произведений отрезков хорд и секущих в окружности. Критерии вписанности четырёхугольника через произведения отрезков. Понятие степени точки относительно окружности. Свойства и признаки описанных четырёхугольников и многоугольников. Задачи на вписанные окружности и описанные многоугольники.





3	01.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Нестандартные критерии описанности. Домашнее задание по семинару. Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	04.12	19:00	Семинар	Счёт в отрезках	Теоремы синусов и косинусов. Теорема Фалеса. Подобные треугольники. Свойство биссектрисы треугольника. Пять формул площади треугольника. Отношения площадей треугольников с общей высотой, с общим углом. Теоремы Чебы и Менелая (в двух формах). Вычисление длин отрезков в треугольнике. Доказательство различных формул, связывающих между собой элементы треугольника. Счётные планиметрические задачи. Домашнее задание по семинару.
5	06.12	19:00	Семинар	Продвинутое факты о треугольнике	Продвинутое факты про треугольник, не связанные с окружностями напрямую. Симметрия АО и АН относительно биссектрисы угла А, прямая Эйлера, точка Торричелли, симедиана, задача №255 и другие. Свойства симметрии ортоцентра. Окружность девяти точек. Отрезки касательных к вписанной и невписанным окружностям, точки Жергонна и Нагеля. Лемма о трезубце. Прямая Симсона. Формула Эйлера для треугольника.





6	08.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение задач с помощью этих фактов и теорем. Домашнее задание по семинару. Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	11.12	19:00	Семинар	Радикальная ось и радикальный центр. Применение свойств радикальных осей в задачах.	Принцип Карно. Понятие радикальной оси двух окружностей и радикального центра трёх окружностей. Построение радикальной оси двух окружностей. Применение свойств радикальных осей в задачах. Домашнее задание по семинару.
8	13.12	19:00	Семинар	Векторы	Понятие вектора. Действия с векторами. Основные векторные равенства. Решение задач с помощью векторов. Скалярное произведение векторов. Три формы скалярного произведения векторов. Применение скалярного произведения для решения задач. Домашнее задание по семинару.
9	15.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	18.12	19:00	Семинар	ГМТ	Основные геометрические места точек: окружность, биссектриса, серединный перпендикуляр, ГМТ с постоянным углом, окружность Аполлония. Задачи на геометрические места точек, в том числе задачи на построение. Метод ГМТ в задачах на доказательство. Домашнее задание по семинару.





11	20.12	19:00	Семинар	Дополнительные построения, основанные на движениях	Применение в геометрических задачах дополнительных построений, связанных с осевой симметрией, центральной симметрией, поворотом, параллельным переносом. В том числе геометрические задачи на экстремумы. Домашнее задание по семинару.
12	22.12	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	23.12	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Понарин Я. Н. *Элементарная геометрия, том 1: Планиметрия, преобразования плоскости.*
- Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.*
- Акопян А. В. *Геометрия в картинках.*
- Chen E. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.*
- Andreescu T., Korsky S., Pohoata C. *Lemmas in Olympiad Geometry.*
- *Материалы сообщества в социальной сети ВКонтакте и канала на видеохостинге Youtube «Олимпиадная геометрия».*





Январь 2023 года

Тема месяца: теория чисел.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- основные свойства делимости;
- что такое простые и составные числа, как раскладывать числа на простые множители, единственность такого разложения;
- что такое НОД, НОК, как их находить;
- что такое взаимно простые числа, попарно взаимные числа, взаимно простые в совокупности числа, как связаны эти понятия между собой;
- принцип алгоритма Евклида и доказательство его корректности;
- концепцию деления с остатком;
- как работать с остатками отрицательных чисел;
- что такое сравнение по модулю, свойства сравнений;
- формулировки и доказательства признаков делимости;
- идею закливания остатков степеней;
- принцип невозможных остатков;
- как корректно осуществить перебор при решении уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- идею перебора остатков для доказательства отсутствия решений уравнения в целых числах;
- основные соображения, позволяющие применить оценки и неравенства в теоретико-числовых задачах;
- содержание и доказательство леммы об арифметической прогрессии;
- понятия полной и приведённой системы вычетов;
- принцип обратимости остатков, существование обратных остатков;





- формулировки и различных доказательства малой теоремы Ферма, теоремы Эйлера, китайской теоремы об остатках, в том числе, как следствий леммы об арифметической прогрессии.

обучающийся **умеет**:

- решать теоретико-числовые задачи на применение базовых свойств делимости;
- использовать свойства сравнений по модулю для решения задач;
- осуществлять полный и эффективный перебор остатков степеней по различным модулям;
- решать уравнения в целых числах методом разложения на множители;
- использовать признаки делимости в задачах, в том числе и в их общем виде;
- доказывать отсутствие решений у уравнения в целых числах методом перебора остатков;
- использовать основные приёмы оценок и неравенств в теоретико-числовых задачах;
- находить обратные остатки (осуществлять деление в кольце вычетов);
- использовать малую теорему Ферма и теорему Эйлера;
- применять китайскую теорему об остатках в конструктивных задачах;
- строить бесконечные серии решений уравнений в целых числах.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	08.01	19:00	Семинар	Свойства делимости	Понятие делимости. Простые и составные числа, основная теорема арифметики. Бесконечность количества простых чисел. Каноническое разложение чисел на простые множители. Проверка на простоту, нахождение НОД и НОК. Взаимно простые числа. Доказательство





					формулы о количестве делителей. Задачи о простых и составных числах. Домашнее задание по семинару
2	10.01	19:00	Семинар	Сравнения по модулю, перебор остатков	Определения деления с остатком и сравнения по модулю. Свойства сравнений. Применение сравнений по модулю для решения задач на остатки. Домашнее задание по семинару
3	12.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
4	15.01	19:00	Семинар	Признаки делимости	Доказательство признаков делимости на степени чисел 2 и 5, на числа 3 и 9, на число 11. Общий вид признаков делимости. Решение задач с их помощью. Домашнее задание по семинару
5	17.01	19:00	Семинар	Уравнения в целых числах	Решение уравнений в целых числах методом разложения на множители и перебора делителей. Доказательство отсутствия решений уравнения в целых числах. Метод перебора остатков. Домашнее задание по семинару
6	19.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
7	22.01	19:00	Семинар	Оценки в теории чисел	Применение различных оценок в задачах с целыми числами. Домашнее задание по семинару





8	24.01	19:00	Семинар	Лемма об арифметической прогрессии. Обратные остатки.	Доказательство и применение леммы об арифметической прогрессии. Полная и приведённая системы вычетов. Обратные остатки. Домашнее задание по семинару
9	26.01	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	29.01	19:00	Семинар	Малая теорема Ферма, теорема Эйлера	Доказательство малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера. Применение в задачах. Домашнее задание по семинару
11	31.01	19:00	Семинар	Конструкции с целыми числами	Китайская теорема об остатках, её применение в задачах на конструктивы с целыми числами. Построение бесконечных серий решений. Различные задачи на конструктивы с целыми числами. Домашнее задание по семинару
12	02.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	03.02	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Главы «Делимость и остатки», «Делимость-2», «Системы счисления».
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Делимость и остатки», «Алгоритм Евклида».
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. Главы 3, 4.
- Сгибнев А. И. Делимость и простые числа.





- Вавилов В. В. Многоликий алгоритм Евклида.
- Журнал «Квант», 2000, №1 и №3. Сендеров В. А., Спивак А. В. «Малая теорема Ферма».
- Журнал «Квант», 1997, №3. Флейшман Д. «Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова».
- Khurmi A. *Modern Olympiad Number Theory*. Главы 1, 2, 4, 9.
- Stevens J. *Olympiad Number Theory Through Challenging Problems*. Главы 1, 2, 4.





Февраль 2023 года

Тема месяца: стереометрия.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- аксиомы стереометрии и следствия из них;
- теорему о трёх перпендикулярах и три способа её применения;
- метод следов для построения сечений;
- метод проекций для построения сечений;
- алгоритм нахождения углов и расстояний в пространстве с помощью классического подхода;
- суть метода проекции площади и метода объёмов;
- основные приёмы работы с телами вращения в задачах;
- скалярное, векторное и смешанное произведение векторов в пространстве, их свойства и пути применения;
- уравнения прямых и плоскостей в пространстве, связь между разными видами уравнений;

обучающийся **умеет:**

- выводить следствия из аксиом стереометрии;
- строить сечения и находить их площадь;
- применять теоремы о параллельности и перпендикулярности в пространстве;
- использовать теорему о трёх перпендикулярах;
- находить углы и расстояния в пространстве с помощью классического подхода
- находить объёмы многогранников;
- решать задачи с телами вращения, доказывать связанные с ними формулы;
- находить углы, расстояния и объёмы с помощью векторно-координатного подхода.





№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	05.02	19:00	Семинар	Основы стереометрии	Параллельность и перпендикулярность в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах. Построение сечений методом следов, методом проекции. Домашнее задание по семинару.
2	07.02	19:00	Семинар	Сечения	Задачи на построение и нахождение площади сечения. Метод проекции площади. Домашнее задание по семинару.
3	09.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	12.02	19:00	Семинар	Углы в пространстве: классический подход	Угол между прямыми. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью. Домашнее задание по семинару.
5	14.02	19:00	Семинар	Расстояния в пространстве: классический подход	Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Домашнее задание по семинару.
6	16.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	19.02	19:00	Семинар	Объёмы многогранников	Доказательство формул объёма многогранников. Использование метода объёмов в задачах на вычисление расстояний. Домашнее задание по семинару.





8	21.02	19:00	Семинар	Тела вращения	Шар, цилиндр, конус. Формулы, связанные с телами вращения. Задачи с телами вращения. Домашнее задание по семинару.
9	23.02	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	26.02	19:00	Семинар	Векторно-координатный подход в стереометрии: теория	Действия с векторами в пространстве. Скалярное произведение. Векторное и смешанное произведение. Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Домашнее задание по семинару.
11	28.02	19:00	Семинар	Векторно-координатный подход в стереометрии: применение	Применение векторно-координатного метода для нахождения углов и расстояний в пространстве. Домашнее задание по семинару.
12	01.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	02.03	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Калинин А. Ю., Терёшин Д. А. Геометрия 10-11 классы.
- Шестаков С. А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии.
- Родионов Д. Е., Родионов Е. М. Стереометрия в задачах.
- Материал сайта mathus.ru «Векторы в стереометрии», URL: <https://mathus.ru/math/stereovec.pdf>





Март 2023 года

Тема месяца: текстовые задачи и методы рассуждений.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- что такое математическая модель задачи и что значит «составить математическую модель задачи»;
- концепцию средней скорости;
- какие бывают виды относительного движения двух объектов;
- относительность движения;
- связь между характеристиками движения объекта и внешним видом графика движения;
- как составлять математические модели задач с движением объектов по кругу;
- как составлять математические модели задач с движением объектов по эскалатору;
- понятие производительности;
- вывод формул для арифметической, геометрической и бесконечной геометрической прогрессии;
- понятие простого и сложного процента;
- различие дифференцированных и аннуитетных платежей, методы решения задач на эти виды платежей;
- концепцию спроса и предложения, понятие прибыли и принцип её максимизации;
- значение принципа крайнего для решения широкого круга задач;
- суть метода спуска;
- содержание метода математической индукции;
- возможные проблемы с логикой решения при применении метода математической индукции;





обучающийся **умеет**:

- составлять математические модели в задачах на движение и совместную работу;
- изображать и использовать графики движения объектов;
- решать задачи с арифметической, геометрической и бесконечной геометрической прогрессиями;
- использовать различные подходы в задачах с числовыми последовательностями общего вида;
- решать задачи на проценты, вклады и кредиты;
- применять различные подходы в задачах на оптимизацию;
- применять свойства делимости и различные оценки при исследовании математических моделей текстовых задач;
- работать с упорядоченными наборами чисел;
- эффективно применять принцип крайнего в различных задачах;
- работать с методом бесконечного спуска;
- доказывать утверждения из различных разделов математики методом математической индукции.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	04.03	19:00	Семинар	Задачи на движение и совместную работу	Составление математической модели задачи. Грамотное введение переменных. Понятие средней скорости. Понятие производительности. Решение стандартных задач на движение и на совместную работу. Задачи на движение с дополнительными условиями: по реке, по эскалатору, по кругу. Сложные и нестандартные задачи на движение и





					совместную работу. Домашнее задание по семинару.
2	06.03	19:00	Семинар	Прогрессии и последовательности	Формулы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями. Задачи об арифметической и геометрической прогрессии. Суммирование рядов. Задачи на свойства различных последовательностей. Домашнее задание по семинару.
3	08.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
4	11.03	19:00	Семинар	Задачи с экономическим содержанием	Задачи на проценты, вклады и кредиты. Простой и сложный процент, дифференцированные и аннуитетные платежи. Домашнее задание по семинару.
5	13.03	19:00	Семинар	Задачи на оптимизацию	Текстовые задачи на оптимизацию. Применение свойств квадратичной функции в задачах на оптимизацию. Неравенство Коши в задачах на оптимизацию. Нестандартные задачи на оптимизацию. Домашнее задание по семинару.
6	15.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
7	18.03	19:00	Семинар	Текстовые задачи на делимость	Текстовые задачи, в решении которых используются свойства целых чисел,





					делимость и остатки. Домашнее задание по семинару.
8	20.03	19:00	Семинар	Текстовые задачи на неравенства	Текстовые задачи, в решении которых используются неравенства в общем виде, а также неравенства, основанные на свойствах целых чисел. Домашнее задание по семинару.
9	22.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
10	25.03	19:00	Семинар	Упорядочивание и принцип крайнего. Метод спуска.	Задачи, требующие применения идеи упорядочивания либо принципа крайнего. Метод спуска. Домашнее задание по семинару.
11	27.03	19:00	Семинар	Метод математической индукции	Понятие метода математической индукции. Применение метода математической индукции в задачах на доказательство тождеств, при доказательстве неравенств, задачах на делимость и в различных дискретных задачах. Домашнее задание по семинару.
12	29.03	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы.
13	30.03	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		





Материалы методического сопровождения:

- Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. Стр. 200-217.
- Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Стр. 178-220.
- Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. Глава 1.
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Метод крайнего», «Индукция».
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Глава «Индукция».
- Шень А. Математическая индукция.
- Engel A. *Problem-Solving Strategies*. Главы 3, 8.





Апрель 2023 года

Тема месяца: дискретные задачи.

Цели месяца:

обучающийся **понимает:**

- что такое инвариант процесса и возможности применения инвариантов в задачах на доказательство;
- понятие полуинварианта и возможности применения полуинвариантов в задачах;
- как различные раскраски клетчатой плоскости могут помочь в задачах на доказательство;
- суть решения задач с помощью метода перераспределения зарядов;
- что такое «правильная игра» с математической точки зрения;
- принцип симметричной стратегии в математической игре;
- глобальные идеи, полезные в задачах на конструирование объектов с заданными свойствами;
- варианты применения принципа «узких мест»;
- значимость наличия как «оценки», так и «примера» в задачах типа «оценка+пример»;
- какие рассуждения могут считаться строгими доказательствами оценки в задачах типа «оценка+пример», а какие – нет;
- основные приёмы решения задач типа «оценка+пример» на клетчатых досках;
- правила суммы и произведения в комбинаторике;
- различия между перестановками, размещениями (без повторений и с повторениями) и сочетаниями;
- вид формул для перестановок, размещений (без повторений и с повторениями) и сочетаний, вывод этих формул;
- принцип дополнения в комбинаторике;
- суть метода шаров и перегородок;





- доказательства тождеств для чисел сочетаний различными методами, их комбинаторную суть;
- связь комбинаторных тождеств и треугольника Паскаля;
- алгоритм решения линейных рекуррентных уравнений;
- различные варианты определения и связь между числами Каталана;
- основные понятия теории графов;
- концепцию дерева и минимальной связности в графе;
- понятие эйлеровости графа, критерий эйлеровости (с доказательством);
- понятие гамильтоновости графа;
- концепцию ориентированного графа;
- понятие петель и кратных рёбер в графе;
- основные приёмы организации процессов в графах;
- доказательство и содержание Леммы Холла;
- доказательство и содержание теоремы Турана;
- концепцию перечисления деревьев в графе и теорему Кэзи;
- понятие числа Рамсея;

обучающийся **умеет**:

- решать задачи с помощью идеи поиска инварианта;
- решать задачи на клетчатой плоскости методом раскраски;
- применять полуинварианты в задачах;
- применять метод перераспределения зарядов в задачах;
- придумывать выигрышную стратегию за одного из игроков в математических играх;
- строго доказывать, что некоторая стратегия игрока в математической игре действительно является победной;
- конструировать числовые и геометрические объекты с заданными свойствами;





- применять классические приёмы доказательства оценки в задачах типа «оценка+пример» на клетчатых досках;
- придумывать нестандартные ходы для доказательства оценки в задачах типа «оценка+пример» с различной тематикой;
- корректно применять правила суммы и произведения в комбинаторике;
- работать со сложными выражениями, содержащими факториалы;
- грамотно применять формулы перестановок, размещений (с повторениями и без повторений) и сочетаний в задачах на подсчёт количества вариантов;
- уместно применять метод шаров и перегородок;
- составлять и решать рекуррентные уравнения в задачах перечислительной комбинаторики;
- вычислять числа Каталана;
- переводить задачу на язык теории графов и корректно применять специальную терминологию теории графов;
- решать задачи на свойства деревьев и выделение остовного дерева в графе;
- использовать критерий эйлеровости графа;
- доказывать отсутствие гамильтоновости графа различными способами;
- применять концепции ориентированных графов, петель и кратных рёбер в графе;
- использовать приёмы организации процессов в графах
- доказывать и применять лемму Холла, многократную лемму Холла;
- использовать теорему Турана;
- доказывать основные утверждения теории Рамсея.

№	Дата	Время	Формат занятия	Тема занятия	Содержание занятия
1	01.04	19:00	Семинар	Инвариант. Полуинвариант	Понятие инварианта. Примеры построения инвариантных величин в задаче. Акцент на





					чётности как инварианте. Домашнее задание по семинару
2	03.04	19:00	Семинар	Полуинвариант. Метод перераспределения зарядов	Понятие полуинварианта. Примеры нахождения полуинвариантов в задаче. Метод перераспределения зарядов, разновидность идеи инварианта – метод, основанный на введении вспомогательных весов, организации процесса их изменения и двойном подсчёте. Домашнее задание по семинару
3	05.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
4	08.04	19:00	Семинар	Игры и стратегии	Понятие «правильной игры». Симметричные стратегии и стратегия дополнения. Игры-шутки. Понятие выигрышных и проигрышных позиций. Анализ с конца в задачах на игры и стратегии. Домашнее задание по семинару
5	10.04	19:00	Семинар	Оценка+пример на клетчатых досках	Введение в задачи типа оценка+пример. Значение как построения примера, так и доказательства оценки в подобных задачах. Техники и полезные соображения при построении примера. Полезные соображения при решении задач типа оценка+пример, сформулированных на клетчатых досках. Разбиение на части. Применение узлов, стенок. Метод





					выделенных множеств. Раскраска. Домашнее задание по семинару
6	12.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
7	15.04	19:00	Семинар	Перечислительная комбинаторика	Перестановки, размещения, сочетания. Отработка навыка проведения перебора в комбинаторных задачах, разбиение на случаи. Метод шаров и перегородок. Различные задачи на подсчёт числа вариантов. Домашнее задание по семинару
8	17.04	19:00	Семинар	Рекурренты в комбинаторике	Числа Каталана. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение рекуррентных уравнений с помощью характеристических уравнений. Домашнее задание по семинару
9	19.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
10	22.04	19:00	Семинар	Теория графов: повторение	Понятие графа. Определения в теории графов. Простейшие задачи на графы. Чётность числа нечётных вершин. Изоморфность графов. Существование графов с заданными свойствами. Понятие дерева. Задачи на связь количества вершин и рёбер в дереве, задачи на выделение остовного дерева. Формула Эйлера для плоских графов. Эйлеровость и





					гамильтоновость графов. Критерий эйлеровости. Задачи на обход графов. Домашнее задание по семинару
11	24.04	19:00	Семинар	Теоремы теории графов	Лемма Холла. Перечисление деревьев, теорема Кэли. Теорема Турана. Введение в теорию Рамсея. Раскраски графов. Домашнее задание по семинару
12	26.04	19:00	Практическое занятие	Практика по пройденным темам	Решение и сдача преподавателю задач на пройденные темы
13	27.04	15:00-23:00	День индивидуальных консультаций		

Материалы методического сопровождения:

- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. Главы «Графы», «Игры».
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Главы «Комбинаторика-1», «Комбинаторика-2», «Графы-1», «Графы-2», «Игры».
- Виленкин Н. Я. Комбинаторика. Главы I, II.
- Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика.
- Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики.
- Оре О. Графы и их применение.
- Журнал «Квант», 2019, №12. Бакаев Е., Полянский А., Челноков Г. Метод перераспределения зарядов.

