IV тур

Решения

Старт

На выездной школе АПО в отеле «У равнины» в каждый из дней 20 ноября и 22 ноября дети суммарно сдали по 100 задач. Могли ли оказаться так, что 22 ноября каждый ребёнок решил в 2 раза больше или в 2 раза меньше задач, чем 20 ноября?

Ответ: Не могло.

Решение: Пусть такое могло произойти. Тогда каждый ребёнок решил количество задач, кратное трём, ведь если в день с меньшим числом задач он нашёл x решений, то в другой день правильных решений было $2x$, а сумме $3x$. Сумма нескольких чисел, кратных 3, делится на 3, поэтому общее количество решённых задач за 2 дня должно делиться на 3. Однако, $100 \cdot 2 = 200$ не кратно 3. Получаем противоречие.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.

Юниоры

Утром 4 ноября 2022 года в левом и правом нижних углах доски 2022×2022 стоят кони. Вечером каждого дня, приходя домой после рисования, Тюбик одновременно делает по 1 ходу конями по правилам шахмат. В какой день кони впервые смогут оказаться на одной клетке?

Ответ: Кони никогда не окажутся на одной клетке вместе.

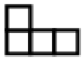
Решение: Раскрасим доску шахматной раскраской. Тогда левый и правый нижние углы доски 2022×2022 разных цветов. Заметим, что шахматный конь каждым ходом меняет цвет клетки, на которой стоит. Значит, после каждого хода кони будут стоять на клетках разных цветов. Откуда следует, что кони никогда не смогут оказаться на одной клетке вместе.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.

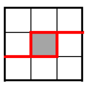
Комментарий: На кружке по рисованию Тюбик конечно же узнал про метод раскраски. Подробнее про раскраски можно прочитать в статье «О методе раскраски на примере одной задачи».

Сеньоры

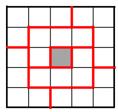
Докажите, что для любого нечётного натурального $n > 1$ клетчатая доска $n \times n$ с вырезанной центральной клеткой разбивается по линиям сетки на непересекающиеся четырёхклеточные фигурки в виде буквы «Г» (см. рис.). *Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*



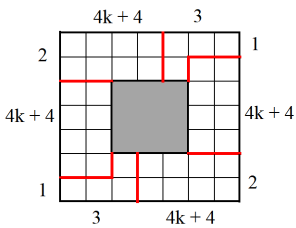
Решение: Докажем утверждение задачи по индукции с шагом 4. Для этого сначала докажем базу для квадратов 3×3 и 5×5 (см. рис.). Для индукционного перехода от n к $n + 4$ докажем, что квадратная рамка с нечётной длиной и толщиной 2 также разрезается на четырёхклеточные фигурки в виде буквы «Г» (см. рис.). Если $n = 4k + 1$, то поделим рамку на 2 прямогольника $(4k + 4) \times 2$, 2 — $4k \times 2$ и 2 уголка в виде буквы «Г». Если $n = 4k + 3$, то поделим рамку на 4 прямогольника $(4k + 4) \times 2$ и 2 уголка в виде буквы «Г». Осталось заметить, что прямоугольники, у которых одна сторона делится на 4, а другая равна 2, разбиваются на прямоугольники 4×2, которые в свою очередь очевидным образом разрезаются на фигурки в виде буквы «Г».



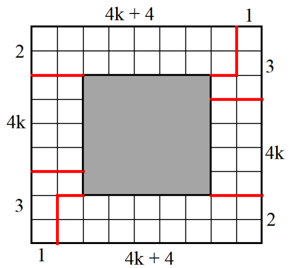
3×3



5×5



$4k + 3 \to 4k + 7$



$4k + 1 \to 4k + 5$

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.

Открытая лига

Пусть $S(p)$ — сумма всех простых чисел, меньших простого числа p. Конечно или бесконечно количество простых чисел q, для которых $S(q)$ не делится на q?

Ответ: Бесконечно.

Решение: Пусть $\{p_n\}$ — последовательность всех простых чисел $(p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots)$. Если предположить, что количество простых чисел q, для которых $S(q)$ не делится на q, конечно, то найдётся такое k, что $S(p_k) \vdots p_k$, $S(p_{k+1}) \vdots p_{k+1}$. Заметим, что $S(p_{k+1}) = S(p_k) + p_k$, где оба слагаемых делятся на p_k, т.е. $S(p_{k+1}) \vdots p_k$. Из-за взаимной простоты p_k и p_{k+1} получим, что из делимости $S(p_{k+1})$ на p_k и p_{k+1} следует делимость $S(p_{k+1})$ на $p_k p_{k+1} \Rightarrow S(p_{k+1}) \geqslant p_k p_{k+1}$. Однако, $S(p_{k+1}) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k < p_k \cdot k < p_k p_{k+1}$. Получаем противоречие. Значит, количество простых чисел q, для которых $S(q)$ не делится на q, бесконечно.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.