III тур

Решения

Старт

Сумма трёх различных правильных положительных дробей равна 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма знаменателей этих дробей?

Ответ: 11.

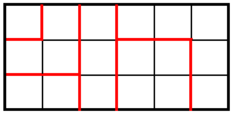
Решение: Приведём сначала пример, в котором сумма знаменателей равна 11: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Докажем, что сумму меньше получиться нельзя.
Пусть существует пример с суммой знаменателей меньше 11. Если среди знаменателей наименьший равен 3, то либо сумма знаменателей хотя бы $3+4+4=11$, либо сумма дробей больше $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. Значит, среди дробей есть $\frac{1}{2}$. В случае если нет дроби со знаменателем 3 либо сумма знаменателей хотя бы $2+4+5=11$, либо сумма дробей не меньше $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}>1$. Значит, есть и знаменатель 3. Если у третьей дроби знаменатель не больше 5, то минимальная сумма дробей $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$. Значит, в этом случае сумма знаменателей хотя бы $2+3+6=11$. Получаем противоречие с предположением о том, что искомая сумма может быть меньше 11.

Критерии оценивания: Полное решение с оценкой и примером — 7 баллов. Пример с суммой 11 — 3 балла.

Юниоры

Найдите клетчатый прямоугольник наименьшей площади, который можно разбить по линиям сетки на 6 различных клетчатых фигур.

Решение: 6 минимальных по площади клетчатых фигур — это квадрат 1×1; прямоугольники 1×2, 1×3, уголок из трёх клеток, а также какие-то две четырёхклеточные фигуры. Значит, минимальная площадь искомого прямоугольника $1+2+3+3+4+4=17$. Прямоугольник площади 17 клеток — это 1×17. Поскольку для такого прямоугольника должен быть выбран набор с наименьшими площадями, то обязательно следует взять трёхклеточный уголок, который не может быть вырезан из прямоугольника 1×17. Значит, минимальная площадь 18 клеток. Один из возможных примеров приведён ниже.



Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов. Пример с площадью 18 клеток — 3 балла. Оценка на 18 клеток — 3 балла.

Сеньоры

Уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ имеет ровно 2023 упорядоченных натуральных решения (x, y). Докажите, что N — точный квадрат.

Решение: После домножения исходного уравнения на xyN получим равносильное уравнение $yN + xN = xy$. Перенесём все слагаемые в правую сторону и добавим к обеим частям N^2, воспользовавшись Simon's Favourite Factoring Trick, чтобы прийти к равносильному $(x-N)(y-N) = N^2$. Поскольку нас интересуют упорядоченные пары (x, y), то можно считать, что $x \leqslant y \Rightarrow x-N \leqslant y-N$. Заметим, что если обе скобки $x-N$ и $y-N$ отрицательные, то из натуральности x, y следует, что $(x-N)\cdot(y-N) \leqslant (1-N)(1-N) < N^2$. Значит, $0 \leqslant x-N \leqslant y-N$ и $(x-N), (y-N) \in \mathbb{Z}$. Тогда $(x-N)$ и $(y-N)$ натуральные числа с произведением N^2, а количество упорядоченных решений (x, y) совпадает с количеством натуральных делителей N^2, не превышающих $\sqrt{N^2} = N$. Заметим, что все такие делители являются натуральными делителями N. Тогда у N нечётное количество (2023) натуральных делителя, поэтому N — точный квадрат.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.

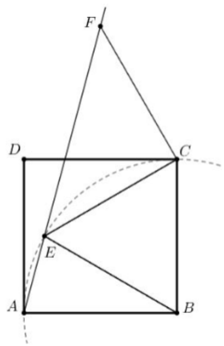
Комментарий: Подробнее о Simon's Favourite Factoring Trick можно прочитать в статье на AOPS.

Открытая лига

Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E, а на луче AE, пересекающем сторону CD, взята точка F. Оказалось, что $AB = CE$, и треугольник ECF прямоугольный равнобедренный ($EC = CF$). Найдите $\angle ABE$.

Ответ: $30°$.

Решение 1: ECF — прямоугольный равнобедренный треугольник, поэтому $\angle CEA = 135°$. Рассмотрим окружность ω с центром B и радиусом $BA = BC$. $\angle CEA$ дополняет половину $\angle ABC$ до $180°$, поэтому точка E тоже лежит на окружности ω. Тогда $BE = BC = BA = CE$, треугольник BCE — равносторонний, $\angle CBE = 60^\circ$, откуда и следует ответ.



Решение 2: Отметим точку E' внутри квадрата $ABCD$, а точку F' — снаружи так, что треугольники BCE' и CDF' равносторонние. Заметим, что треугольники ABE' ($AB = BE'$) и ADF' ($AD = DF'$) равнобедренные. Тогда $\angle BAE' = \angle BE'A = \frac{180^\circ - \angle ABE'}{2} = \frac{180^\circ - (\angle ABC - \angle E'BC)}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)}{2} = 75^\circ$, $\angle BAF' = \angle BAD - \angle F'AD = 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle ADF'}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - (\angle ADC + \angle CDF')}{2} =$ $= 90^\circ - \frac{180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)}{2} = 75^\circ = \angle BAE'$, поэтому точки A, E' и F' лежат на одной прямой. Кроме того, $\angle E'CF' = \angle E'CD + \angle DCF' = (\angle BCD - \angle BCE') + \angle DCF' = (90^\circ - 60^\circ) + 60^\circ = 90^\circ$, и $E'C = BC = CD = CF'$, поэтому треугольник $E'CF'$ прямоугольный равнобедренный, и он равен прямоугольному равнобедренному треугольнику ECF по двум сторонам и углу между ними ($E'C = EC$, $F'C = FC$, $\angle BAE' = 90^\circ = \angle BE'A$). Заметим, что точки B, D, E, F, E' и F' лежат на одной окружности с центром C. Если точки E и E' не совпадают, то из равенства треугольников ECF и $E'CF'$ и предположения, что точка E лежит на дуге BE', получим, что точка F лежит на дуге $F'D$, а из предположения, что точка E лежит на дуге DE' получим, что точка F лежит на дуге $F'C$. В обоих случаях точки A, E и F не лежат на одной прямой, так как на одной прямой лежат точки A, E', F'. Получаем противоречие. Значит, $E = E'$, и $\angle ABE = \angle ABE' = 30^\circ$.

Решение 3: Заметим, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности с центром C. Обозначим данную окружность за Ω. $AB \perp CB$ и $AD \perp CD \Rightarrow AB$ и AD касательные к Ω. Значит, точка A лежит на симедиане треугольника BFD, проведённой к стороне BD. Пусть P — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда P — середина BD, и $\angle BFP = \angle DFA = \alpha$. Центральный $\angle ECD$, опирающийся на дугу DE, в 2 раза больше вписанного $\angle DFE$, опирающегося на ту же дугу, поэтому $\angle ECD = 2 \cdot \angle DFA = 2\alpha$. $DCF = \angle ECF - \angle ECD = 90^\circ - 2\alpha$. $\angle BCF = \angle BCD + \angle DCF = 90^\circ + (90^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - 2\alpha$. В равнобедренном треугольнике BCF: $\angle CBF = \angle CFB = \frac{180^\circ - \angle BCF}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \alpha$. Тогда $\angle CBF =$

$\alpha = \angle BFP \Rightarrow BC \parallel FP$. Но $BC \perp CD$, поэтому $PF \perp CD$, но точка P лежит на серединном перпендикуляре к CD, поэтому F также лежит на серединном перпендикуляре к CD. Значит, $DF = FC = CD \Rightarrow$ треугольник CDF равносторонний. Значит, $\angle FCD = 60^\circ \Rightarrow \angle DCE = \angle FCE - \angle FCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Значит, треугольник BCE равнобедренный ($BC = CE$) с $\angle BCE = 60^\circ \Rightarrow$ треугольник BCE равносторонний, поэтому $\angle CBE = 60^\circ$, а $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.

Комментарий: Подробнее о симедиане можно прочитать в журнале «Квант».