II тур

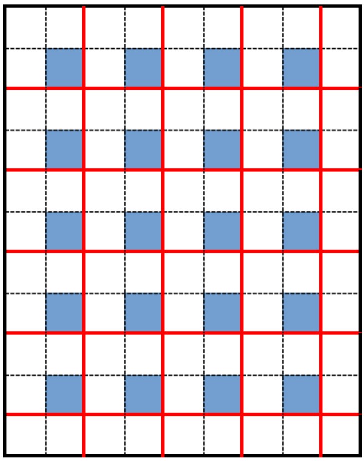
Решения

Старт

Клумба представляет собой квадрат 11×11, разбитый на клетки 1×1. В каждую клетку можно посадить не больше одного цветка. Клумба называется *ухоженной*, если в каждом квадрате 2×2 высажен хотя бы один цветок. Какое наименьшее количество цветков нужно посадить, чтобы пустая клумба стала ухоженной?

Ответ: 25.

Решение: Выделим 25 непересекающихся кввадратов 2×2. В каждом из них нужно высадить хотя бы один цветок. Пример на 25 цветков приведён на картинке.



Критерии оценивания: Полное решение с оценкой и примером — 7 баллов. Пример на 25 цветков — 3 балла. Оценка на 25 цветков — 3 балла.

Юниоры

Число длины n называется $k-$*суммируемым* $(1 < k < n)$, если каждая цифра в нём, начиная с $(k+1)$-го места слева, равна сумме k предыдущих. Найдите наибольшее натуральное число m, содержащее не более 2022 нулей, которое является $k-$суммируемым для некоторого натурального k.

Ответ: $\underbrace{1...1}_{9}\underbrace{0...0}_{2022}9$.

Решение: Пусть сумма первых k цифр равна $S \geqslant 1$, а длина числа m есть l. Если в числе m не более 6 нулей, то цифра на $(k+1)$-ом месте равна S, цифра на $(k+2)$-ом месте не меньше S, на $(k+3)$-ем хотя бы $S+S=2S$, на $(k+4)$-ом хотя бы $S+2S=3S$, на $(k+5)$-ом хотя бы $2S+3S=5S$, на $(k+6)$-ом хотя бы $3S+5S=8S$, на $(k+7)$-ом хотя бы $5S+8S=13S>9$. В этом случае $l \leqslant 13$. Если в числе m хотя бы 7 нулей, то все нули должны стоять среди цифр на позициях со 2$-$ой по $k-$ую и $k \geqslant 8$. Цифра на $(k+1)$-ом месте равна S, цифра на $(k+2)$-ом месте не меньше S, на $(k+3)$-ем хотя бы $S+S=2S$, на $(k+4)$-ом хотя бы $S+S+2S=4S$, на $(k+5)$-ом хотя бы $S+S+2S+4S=8S$, на $(k+6)$-ом хотя бы $S+S+2S+4S+8S=16S>9$. Осталось заметить, что среди первых k цифр не более S ненулевых, поэтому при $S \geqslant 5$ среди первых k цифр хотя бы 2 ненулевых и $l \leqslant S+2022+1 \leqslant 2032$. Если $3 \leqslant S \leqslant 4$, то $l \leqslant S+2022+3 \leqslant 2029$. Если $S=2$, то $l \leqslant S+2022+4 \leqslant 2028$. Если $S=1$, то $l \leqslant S+2022+5 \leqslant 2028$. Значит, нельзя получить число более чем из 2032 цифр. Если длина ровно 2032, то среди первых 2031-ой цифры должно быть девять единиц, откуда строится наибольшее возможное число $\underbrace{1...1}_{9}\underbrace{0...0}_{2022}9$.

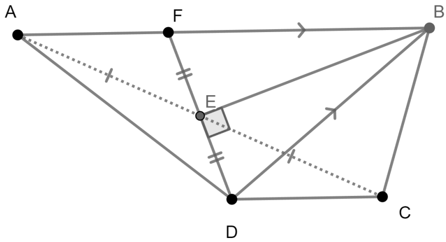
Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов. Правильный ответ — 2 балла.

Сеньоры

В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC. Докажите, что $\angle BED = 90°$.

Решение: Отметим на отрезке AB точку F такую, что $AF = CD$. Тогда $FB = AB - AF = AB - CD = BD$. В четырёхугольнике $AFCD$: $AF = CD$ и $AF || CD$, поэтому $AFCD$ — параллелограмм, а точка E является серединой FD. Но FD — основание равнобедренного треугольника FBD $(FB = BD)$, поэтому точка E — основание высоты из вершины B. Значит, $BED = 90°$.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов.



Открытая лига

На выездную школу АПО по теории игр приехало $2n$ детей ($n > 1$). Каждый вечер выбирают n детей и среди них проводят однокруговой турнир по игре Ним (в игру Ним играют два игрока). Какое минимальное число дней должна идти выездная школа, если за её время каждый ребёнок должен сыграть с каждым хотя бы одну партию в Ним? Приведите ответ и пример.

Ответ: 6.

Решение: За 2 дня каждый ребёнок сыграет с $2 \cdot (n-1) = 2n-2$ другими детьми, поэтому ему не хватит 2 дней игр, чтобы сыграть со всеми, т.е. каждому ребёнку нужно хотя бы 3 участия в турнирах. Тогда участий хотя бы $2n \cdot 3 = 6n$. В каждом турнире принимают участие n человек, поэтому турниров хотя бы $\frac{6n}{n} = 6$. Построим пример на 6 турниров.
Пусть $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Разобьём $2n = 4k$ детей на 4 группы по k человек. В каждом турнире будут участвовать дети из двух групп. За $6 = C_4^2$ турниров дети их двух разных групп сыграют друг с другом по разу, а дети из одной группы сыграют друг с другом трижды.
Пусть $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$. Разобьём $2n = 4k+2$ ребёнка на 10 групп: 4 группы $\{A, B, C, D\}$ по $(k-1) \geqslant 0$ ребёнку и 6 отдельных детей $\{e, f, g, h, i, j\}$. Устроим следующие 6 турниров (в скобках указаны группы, участвующие в одном турнире): (A, B, e, f, g); (C, D, e, f, h); (A, C, g, h, i); (B, D, g, h, j); (A, D, e, i, j); (B, C, f, i, j). В каждом турнире сыграют $2 \cdot (k-1) + 3 \cdot 1 = 2k+1 = n$ детей. Легко убедиться, что любые две группы при такой схеме встретятся на одном турнире, а дети из одной группы также сыграют между собой.

Критерии оценивания: Полное решение — 7 баллов. Оценка на 6 турниров — 2 балла. Пример для чётных n — 1 балл. Пример для нечётных n — 3 балла.