Условие:

На двери вы видите 5-позиционный кодовый замок. Под ним на двери гвоздём нацарапаны какие-то цифры. Присмотревшись, вы увидели вот что:

30! = 265252859812191058636308***A***0000000
35! = 10333147966386144929***B***66665133752320000000
40! = 815915283247897734345611269596115894***CDE***000000000

Используя спасительную подсказку от незнакомца, попробуйте угадать код. Если вы угадаете не все, а только некоторые цифры, это всё равно будет весьма полезно (и принесёт вам баллы), так как сильно сократит время перебора вариантов.

Ответ:

ABCDE = 89272

Решение:

1) 30! = 1x2x...x30 делится на 9. По признаку делимости на 9, натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда в его десятичной записи сумма цифр делится на 9. Считаем остаток суммы цифр в имеющемся числе при делении на 9, получаем 1. Значит, не хватает цифры 8.
2) Предыдущее рассуждение не работает, так как остаток цифры B при делении на 9 получается равен 0, так что для этой цифры возможны два варианта - 0 и 9. Здесь поможет признак делимости на 11. Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11. Посчитав её, выясняем, что B даёт остаток 9 при делении на 11, значит, это цифра 9.
3) Для начала вычислим количество последовательных нулей на конце десятичной записи числа 40!. Для этого необходимо понять, в какой степени простое число 5 содержится в разложении числа 45!=1x2x...x40 на простые множители (так как 2 содержится точно в большей степени, именно количество пятёрок определит, на какую максимальную степень числа 10 делится 45!). Каждое пятое число от 1 до 40 делится на 5, кроме этого, число 25 делится на 25 и даёт сразу две пятёрки в разложение на простые множители. Получается 8+1 = 9 нулей на конце. К сожалению, после цифр CDE их как раз 9. Значит, E точно не 0. При этом предыдущие два рассуждения про признаки делимости на 9 и 11 однозначного ответа не дадут, так как они приведут лишь к совокупности систем двух линейных уравнений с тремя неизвестными цифрами, поэтому однозначно определить цифры CDE не получится. Однако, мы можем воспользоваться признаком делимости на степень двойки. Натуральное число делится на k-ую степень двойки тогда и только тогда, когда число, составленное из его k

последних цифр, делится на эту степень. При этом 40! делится на 20+10+5+2+1 = 38-ую степень двойки (логика та же, что и со степенями пятёрки: каждое второе число от 1 до 40 делится на 2, каждое четвёртое - на 4, ..., каждое 32-ое - на 32). Значит, даже если убрать 9 нулей на конце, оставшееся число 815915283247897734345611269596115894CDE делится на 29-ую степень двойки. Чтобы однозначно определить последние три цифры, достаточно сказать, что это число делится на 1024 (10-ую степень двойки). Значит, достаточно рассмотреть последние 10 цифр этого числа. Таким образом, число 6115894CDE кратно 1024. Деля в столбик, получим, что число 6115894000 при делении на 1024 даёт остаток 752. Значит, подходящее число - 6115894272.

Получаем, что искомый пятизначный код ABCDE имеет вид 89272.

<u>Критерии:</u>

Угадана цифра A - 1 балл
Угадана цифра B - 2 балла
Угаданы цифры CDE - 4 балла

Всего за задание максимум 7 баллов.