Ассоциация
победителей
олимпиад

Командное стратегическое московское соревнование — КОСМОС

Весенний сезон, I тур

Задание по математике

Часть 1. Введение

Итак, ваш дрон собрал данные по размерам скелетов. Теперь ваша задача – провести статистический анализ этих данных, чтобы понять, насколько размер скелетов, а, следовательно, и содержание кислорода в атмосфере планеты, соответствует земному.

Часть 2 данного текста содержит подробный теоретический материал о том, что такое проверка статистических гипотез. Часть 3 сводит это описание к простому алгоритму. Само задание содержится в частях 4 и 5. Поэтому, если у вас мало времени, вы можете пропустить части 2 и 3 с теоретическим материалом, вернувшись к ним, если возникнут какие-то вопросы по выполнению самого задания.

Часть 2. Подробное описание процедуры проверки статистических гипотез

Для того, чтобы это сделать, вам потребуется применить процедуру, известную как «проверка статистических гипотез» (testing statistical hypothese).

Пусть имеется некоторая случайная выборка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (некоторый набор значений исследуемой величины), взятая из генеральной совокупности X (множества всех потенциально существующих значений этой величины). Требуется выяснить, насколько вероятно, что эта выборка могла получиться из генеральной совокупности, распределение значений исследуемой переменной в которой имеет заданные свойства.

Эта проверка осуществляется в пять этапов.

1) Формулируется «нулевая гипотеза» H_0. Она заключается в некотором предположении о том, каким свойством обладает распределение. (Например, что оно имеет фиксированное значение математического ожидания m, или что оно имеет нормальное распределение). Параллельно с ней формулируется «альтернативная гипотеза» H', которая утверждает, что H_0 не верна. Далее необходимо определить статистический критерий (решающее правило), в соответствии с которым гипотеза H_o будет подтверждаться или отвергаться. Для этого…

2) Рассматривается некоторая статистика критерия (test statistic, также известная как функция выборки) $Z\left(x_1, x_2, ..., x_m\right): X^m \rightarrow R$, которая в предположении о истинности гипотезы H_0 будет иметь некоторое известное распределение. Какую именно функцию Z рассматривать – это серьёзный и сложный вопрос, которым занимается теория вероятностей, строго доказывая легитимность рассмотрения тех или иных функций для различных постановок исходной задачи. В математической статистике хорошо изучено несколько десятков «наиболее часто встречающихся» типов гипотез, и известны ещё

сотни специальных вариантов и разновидностей. Для каждой из них в справочниках и пакетах для математических вычислений уже приводятся готовые формулы.

3) Вычисляется выборочное значение статистики критерия $z = Z(x_1, x_2, ..., x_m)$, на основе которого и будет сделано статистическое решение.

4) Выбирается порог статистической значимости α. По смыслу это есть вероятность совершить ошибку 1-го рода, то есть отвергнуть гипотезу H_0 при условии, что она верна. Например, если гипотеза H_0 заключалась в том, что в двух городах одинаковые средние зарплаты, то α – это вероятность принять статистическое решение о том, что средняя зарплата в одном городе всё же выше, чем в другом, если на самом деле они не отличаются, а обнаруженный экспериментально эффект объясняется случайными факторами. Обычно в исследованиях берут статистическую значимость 5%, то есть 0,05. Но иногда, особенно в точных науках, берут 1%, 0,5% и даже меньше. Например, для того, чтобы исключить малейшую возможность ошибки, в эксперименте для поиска бозона Хиггса был установлен порог статистической значимости 0,000005%. Грубо говоря, чем более уверенно вы хотите утверждать о чём-то на основе статистической обработки данных, тем более низким надо брать порог статистической значимости результатов.

5) Делается предположение о невозможности событий, приводящих к маловероятным значениям Z. То есть определяется область Ω_0 допустимых значений статистики критерия Z (region of acceptance), значения из которой наиболее вероятны в условиях истинности гипотезы H_0, и дополняющая Ω_0 критическая область (critical region) Ω', значения из которой маловероятны в условиях истинности гипотезы H_0. Соответственно, если $z = Z(x_1, x_2, ..., x_m) \in \Omega_0$, гипотеза H_0 принимается (более корректно будет сказать «не отвергается на уровне статистической значимости α), а если $z = Z(x_1, x_2, ..., x_m) \in \Omega'$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H'. А собственно границы критической области определяются с помощью ранее зафиксированного порога α по простому правилу. Оно модифицируется в зависимости от того, какую критическую область мы выбираем: левостороннюю (left-tailed, запрещаем только слишком маленькие значения Z), правостороннюю (right-tailed, запрещаем только слишком большие значения Z) или двустороннюю (two-tailed, запрещаем Z сильно отклоняться от математического ожидания в любую сторону). Условная вероятность того, что значение статистики критерия Z при условии истинности гипотезы H_0 отклонится слишком сильно, должно быть равно α, то есть:

- $P\left(H_0\right) =$ α в случае left-tail test
- $P\left(H_0\right) =$ α в случае right-tail test
- $min\{P\left(H_0\right),\ P\left(H_0\right)\} = \frac{\alpha}{2}$ в случае two-tail test

Этот этап можно оформить и другим способом, используя понятие p-value. P-value – это максимальное значение порога статистической значимости α, при котором гипотеза H_0 принимается (или, что то же самое, минимальное значение порога статистической значимости, при котором имеются основания отвергнуть гипотезу H_0). P-value считается как:

- $P(H_0)$ в случае left-tail test
- $P(H_0)$ в случае right-tail test
- $2\ min\{P(H_0),\ P(H_0)\}$ в случае two-tail test

Соответственно, гипотеза H_0 отвергается, если p-value < α, и принимается, если p-value > α.

Часть 3. Алгоритм проверки статистических гипотез

Итак, для того, чтобы проверить некоторую гипотезу о характере распределения генеральной совокупности X, из которой взята выборка $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, на практике необходимо сделать следующее.

1) Сформулировать гипотезу H_0 и определить, какой вид теста будет проводиться (правосторонний, левосторонний, двусторонний).
2) Выбрать некоторую статистику критерия Z, пригодную для данной постановки задачи.
3) Вычислить значение этой статистики для данной выборки $z = Z(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$.
4) Выбрать уровень статистической значимости α, достаточный для исследуемого вопроса.
5) Определить p-value, используя таблицу известной функции распределения статистики критерия Z. Сделать вывод о том, отвергается или подтверждается гипотеза H_0 на выбранном уровне статистической значимости α, сравнив его с p-value. Либо сделать аналогичный вывод не с помощью p-value а с помощью границ критической области, найденных по таблице для известного распределения статистики критерия Z.

Часть 4. Постановка задачи

Вам предлагается ряд данных о размерах скелетов, собранных дроном:

№ образца	Размер скелета (в см)
1	24,2
2	23,0
3	24,8
4	24,5
5	12,7
6	19,0
7	12,2
8	24,6
9	24,5
10	22,4
11	30,4

12	28,2
13	15,4
14	10,3
15	20,0
16	18,4
17	27,9
18	31,0
19	27,0
20	25,6

При этом у вас есть большой массив данных о том, какие средние значения размера скелетов и дисперсии (меры разброса случайной величины вокруг среднего значения) будут у распределений длин скелетов в выборках, собранных в тех или иных условиях. По этой таблице вы определили, что если бы вы изучали скелеты на Земле в зоне схожей с той, в которую приземлился ваш космический корабль, среднее значение их длин составило бы $m_0 = 20,8$ см, а среднеквадратичное отклонение (оно же – квадратный корень из дисперсии) составило бы $\sigma_0 = \sqrt{D_0} = 2,6$ см.

Вам необходимо проверить три гипотезы.

1) Средний размер скелетов на планете совпадает с таковым на Земле. Предполагаем, что дисперсия размеров скелетов на планете такая же, как на Земле.
2) Средний размер скелетов на планете совпадает с таковым на Земле. Предполагаем, что дисперсия (мера разброса случайной величины вокруг среднего значения) размеров скелетов на планете нам не известна и может быть произвольной.

В обоих случаях можно считать, что размер скелетов имеет нормальное распределение. Таким образом, первая гипотеза заключается в проверке того, что математическое ожидание некоторого нормального распределения совпадает с известным значением m_0 при условии, что дисперсия совпадает с известным значением σ^2. Такую процедуру принято осуществлять с помощью так называемого z-test. Для него потребуется таблица значений функции стандартного нормального распределения. Но в таблицах обычно указывают не её, а так называемую функцию Лапласа $\Phi(x)$, из которой значение функции стандартного нормального распределения $F(x)$ можно получить как:

- $F(x) = 0,5 + \Phi(x)$, если $x \geq 0$,
- $F(x) = 0,5 - \Phi(-x)$, если $x < 0$.

Вторая гипотеза заключается в проверке того, что математическое ожидание некоторого нормального распределения совпадает с известным значением m_0 при условии, что дисперсия этого распределения произвольная. Такую процедуру принято осуществлять с помощью так называемого t-test. Для него потребуется таблица значений функции распределения Стьюдента (также известного как t-распределение) с $n - 1$ степенями свободы, (где n – количество измерений).

Часть 5. Пункты задания

Итак, выполните следующие задания по списку. Каждое из них оценивается в 1 балл. При решении необходимо использовать калькулятор.

1. Вычислите среднее значение в выборке $\overline{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$.
2. Для первой гипотезы ($m = m_0$ в предположении $\sigma = \sigma_0$) посчитайте z-критерий по формуле $z = \frac{\overline{X}-m_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$.
3. По таблице (см. Приложение 1) определите значение функции Лапласа $\Phi(x)$ для данного значения z.
4. С помощью этого значения найдите p-value для двустороннего теста, которое будет равно $1 - 2\cdot\Phi(x)$.
5. Сделайте вывод о том, отвергается или принимается гипотеза о равенстве средних значений скелетов на планете и на Земле в предположении о равенстве дисперсий на уровнях статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$, сравнив значение p-value с α (если p-value меньше, H_0 отвергаем).
6. Вычислите выборочную дисперсию по формуле $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$ и выборочное среднеквадратичное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.
7. Для второй гипотезы ($m = m_0$ в предположении, что σ не известно) посчитайте t-критерий по формуле $t = \frac{\overline{X}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.
8. По таблице (см. Приложение 2) определите значения коэффициентов Стьюдента для распределения с $n - 1 = 19$ степенями свободы для каждого уровня статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$.
9. Сделайте вывод о том, отвергается или принимается гипотеза о равенстве средних значений скелетов на планете и на Земле в предположении о том, что дисперсия неизвестна, на уровнях статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$, сравнив значение t-критерия с найденными коэффициентами Стьюдента (если t-критерий больше, H_0 отвергаем).
10. Подведите итог ваших статистических исследований и примете обоснованное решение о том, что ваш экипаж будет делать дальше.

Часть 6. Приложение

Приложение 1. Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		

Приложение 2. Таблица значений коэффициентов Стьюдента в зависимости от количества степеней свободы $(n-1)$ и доверительной вероятности $(1-\alpha)$ для двустороннего теста.

Число степеней свободы $f = n - 1$	n	Доверительная вероятность			
		0.90	**0.95**	**0.99**	**0.999**
1	2	6.3137515148	12.7062047364	63.6567411629	636.619249432
2	3	2.91998558036	4.30265272991	9.92484320092	31.599054577
3	4	2.3533634348	3.18244630528	5.84090929976	12.9239786366
4	5	2.13184678134	2.7764451052	4.60409487142	8.61030158138
5	6	2.01504837267	2.57058183661	4.03214298356	6.86882663987
6	7	1.94318028039	2.44691184879	3.70742802132	5.95881617993
7	8	1.89457860506	2.36462425101	3.49948329735	5.40788252098
8	9	1.85954803752	2.30600413503	3.35538733133	5.04130543339
9	10	1.83311293265	2.26215716274	3.24983554402	4.78091258593
10	11	1.81246112281	2.22813885196	3.16927266718	4.5868938587
11	12	1.7958848187	2.20098516008	3.10580651322	4.43697933823
12	13	1.78228755565	2.17881282966	3.05453958834	4.31779128361
13	14	1.77093339599	2.16036865646	3.01227583821	4.22083172771
14	15	1.76131013577	2.14478668792	2.97684273411	4.14045411274
15	16	1.75305035569	2.13144954556	2.94671288334	4.0727651959
16	17	1.74588367628	2.11990529922	2.92078162235	4.0149963326
17	18	1.73960672608	2.10981557783	2.89823051963	3.96512626361
18	19	1.73406360662	2.10092204024	2.87844047271	3.92164582001
19	20	1.72913281152	2.09302405441	2.86093460645	3.88340584948
20	21	1.72471824292	2.08596344727	2.84533970978	3.84951627298
21	22	1.72074290281	2.07961384473	2.83135955802	3.81927716303
22	23	1.71714437438	2.0738730679	2.8187560606	3.79213067089
23	24	1.71387152775	2.06865761042	2.80733568377	3.76762680377
24	25	1.71088207991	2.06389856163	2.79693950477	3.74539861893
25	26	1.70814076125	2.05953855275	2.78743581368	3.72514394948
26	27	1.70561791976	2.05552943864	2.77871453333	3.70661174331
27	28	1.70328844572	2.05183051648	2.77068295712	3.68959171334
28	29	1.70113093427	2.0484071418	2.76326245546	3.67390640062
29	30	1.69912702653	2.04522964213	2.75638590367	3.6594050194
30	31	1.69726089436	2.0422724563	2.74999565357	3.645958635
40	41	1.68385101139	2.021075383	2.70445926743	3.55096576086
60	61	1.67064886465	2.00029782106	2.66028303115	3.4602004692
120	121	1.65765089935	1.97993040505	2.61742114477	3.37345376507
999999.0	1000000.0	1.64485515072	1.95996635682	2.57583422011	3.29053646126

Часть 7. Ответы

1. Вычислите среднее значение в выборке $\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$.

$$\overline{X} = 22,305$$

2. Для первой гипотезы ($m = m_0$ в предположении $\sigma = \sigma_0$) посчитайте z-критерий по формуле $z = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$.

$$z = 2,589$$

3. По таблице (см. Приложение 1) определите значение функции Лапласа $\Phi(x)$ для данного значения z.

2,58	0,4951
2,60	0,4953

$$\Phi(x) = 0,4952$$

допустимо $0,4951$

4. С помощью этого значения найдите p-value для двустороннего теста, которое будет равно $1 - 2 \cdot \Phi(x)$.

p-value = $0,0096$
допустимо $0,0098$

5. Сделайте вывод о том, отвергается или принимается гипотеза о равенстве средних значений скелетов на планете и на Земле в предположении о равенстве дисперсий на уровнях статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$, сравнив значение p-value с α (если p-value меньше, H_0 отвергаем).

Отвергаем на $\alpha = 5\%,\ 1\%$. На уровне значимости $0,1\%$ оснований отвергнуть гипотезу нет.

6. Вычислите выборочную дисперсию по формуле $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$ и выборочное среднеквадратичное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.

$$S^2 = 35,945$$

$$S = 5,995$$

7. Для второй гипотезы ($m = m_0$ в предположении, что σ не известно) посчитайте t-критерий по формуле $t = \frac{\bar{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

$$t = 1,123$$

8. По таблице (см. Приложение 2) определите значения коэффициентов Стьюдента для распределения с $n - 1 = 19$ степенями свободы для каждого уровня статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$.

19	20	1.72913281152	2.09302405441	2.86093460645	3.88340584948

$2,093$ **при** $\alpha = 5\%$
$2,861$ **при** $\alpha = 1\%$
$3,883$ **при** $\alpha = 0,1\%$

9. Сделайте вывод о том, отвергается или принимается гипотеза о равенстве средних значений скелетов на планете и на Земле в предположении о равенстве дисперсий на уровнях статистической значимости $\alpha = 5\%,\ 1\%,\ 0,1\%$, сравнив значение t-критерия с найденными коэффициентами Стьюдента (если t-критерий больше, H_0 отвергаем).

Не отвергаем на любом уровне статистической значимости.

10. Подведите итог ваших статистических исследований и примите обоснованное решение о том, что ваш экипаж будет делать дальше.

В предположении о равенстве дисперсий распределения размеров скелетов на планете и на Земле получены убедительные доказательства того, что среднее значение размеров скелетов на планете отличается от таковых на Земле. При этом, если несколько модифицировать тест, рассмотрев правостороннюю гипотезу, вместо двухсторонней, можно убедиться, что есть статистически значимое отличие именно в большую сторону. То есть при таком предположении получается, что уровень кислорода на планете не ниже, а, возможно, и выше, чем на Земле. В предположении о том, что дисперсия на планете неизвестна (что является несколько более разумным предположением), убедительных доказательств различия размеров скелетов не получено. Таким образом, статистических оснований предполагать недостаток кислорода в атмосфере планеты на основе собранных данных нет и можно попробовать выйти на поверхность без кислородных баллонов.