РЦ «Вега». «Ассоциация победителей олимпиад»
Мастер-класс по математике. Подготовка к МЭ ВсОШ.
25 ноября 2021

1. Алгебра

1) Алгебраические преобразования и формулы сокращённого умножения.

Выделение полного квадрата. ФСУ для разности равных степеней, суммы равных нечётных степеней, разности равных чётных степеней. Преобразование выражений вида $Ax + Bxy + Cy = D$. Суммы арифметической и геометрической прогрессий.

Задачи для разбора

1. Разложите на множители: $x^4 + 4$.
2. Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?
3. Докажите, что: а) $9^{26}–2^{65}$ делится на 49; б) $5^{300}–4^{200}$ делится на 141; в) $2^{60}+7^{30}$ делится на 13.
4. Решите в целых числах уравнение: а) $x^2 - y^2 = 12$; б) $x + xy + y = 23$.

Задачи с МЭ

1. **(2020, 8.3)** Числа a, b, c удовлетворяют соотношению $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Найдите $(a+b)(b+c)(a+c)$.

2. Функции и многочлены

1) Графический смысл коэффициентов линейной функции.

2) Уравнения прямой.

Общее, каноническое, параметрическое, через две точки, в отрезках.

3) Формула расстояния между точками (с выводом); уравнение окружности.

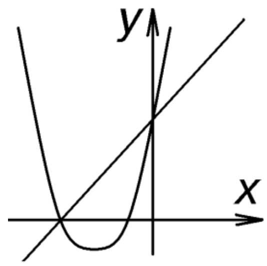
4) Неравенство треугольника.

5) Квадратный трёхчлен.

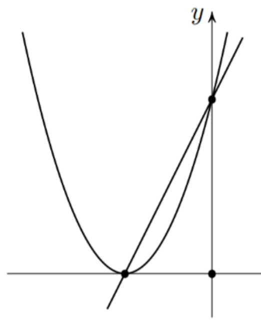
Формула корней квадратного уравнения (с выводом через выделение полного квадрата), количество корней трёхчлена, алгебраические преобразования, теорема Виета, подстановка констант, графический метод.

Задачи для разбора

1. При каких a, b, c, d график функции $y = ax + b$ перпендикулярен графику функции $y = cx + d$?
2. Найдите уравнение прямой, перпендикулярной вектору (1; 4) и проходящей через точку (-2; 7).
3. Найдите уравнение прямой, параллельной вектору (1; 4) и проходящей через точку (-2; 7).
4. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки (3; -2), (-7; 4).
5. Найдите уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке с координатой 5, а ось ординат – в точке с координатой (-3).
6. Определите, сколько решений имеет система в зависимости от значения параметра a:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$
7. Изобразите на плоскости множество точек (x, y), удовлетворяющих условию:
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$$
8. Васе было предложено решить в общем виде в действительных числах уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Его ответ начался со следующего высказывания: «Если $b^2 > 4ac$, то уравнение имеет ровно два различных действительных корня». Прав ли он?



9. На чертеже изображены графики функций $y = 2x^2 + bx + c$ и $y = x + 1$. Найдите b.
10. На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функций (см. рисунок). Уравнение линейной функции имеет вид $y = cx + 2c$ для некоторого числа c. Используя тот же параметр c, запишите уравнение квадратичной функции и объясните свое решение.



11. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2020$. Найдите точку, в которой пересекаются все графики таких функций.
12. Сколько корней и каких по знаку на отрезке [-1; 1] может иметь уравнение $ax^2 + bx = c$, если числа a, b и c являются сторонами некоторого треугольника?

Задачи с МЭ

1. **(2020, 9.1)** Существуют ли такие три положительных числа a, b, c, что каждый из трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b имеет хотя бы один корень?
2. **(2019, 9.3)** График приведенного квадратного трехчлена (парабола) с целыми коэффициентами касается оси Ох. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами (a,b), что график $y = x^2 + ax + b$ тоже касается оси Ох.

3. Теория чисел

Разделить целое число a на натуральное число d с остатком **– значит, представить число *a* в виде *a* = *k*·*d* + *r*, где *k* (неполное частное) – целое число, *r* (остаток) – целое неотрицательное число, причём $0 \le r \le d - 1$. Если оказалось, что *r* = 0, говорят, что «*a* делится на *d*», либо «*d* делит *a*», либо «*a* кратно *d*».**

Основные свойства делимости:
1) Если каждое слагаемое в алгебраической сумме делится на d, то вся сумма делится на d.
2) Если ровно одно слагаемое в алгебраической сумме не делится на d, то и вся сумма не делится на d. (Но если более чем одно слагаемое в алгебраической сумме не делится на d, то сумма может как делиться на d, так и не делиться.)
3) Если в произведении целых чисел один из множителей делится на d, то произведение делится на d. (Но это не значит, что если произведение делится на d, то найдётся множитель, делящийся на d. Например, $2·6 = 12$ кратно 4, но ни 2, ни 6 на 4 не делятся.)
4) 0 делится на любое натуральное число.
5) На 0 делить нельзя.

Если числа *a* и *b* дают одинаковые остатки при делении на натуральное *d*, говорят, что «*a* сравнимо с *b* по модулю *d*». Обозначается это так: *a* ≡ *b* (mod. *d*). Это равносильно тому, что (*a* – *b*) кратно *d*.

Сравнения по одному и тому же модулю *d* очень похожи на обычные равенства: их можно складывать, вычитать и умножать, а также сокращать на числа, взаимно простые с *d*.

Поупражняемся в арифметике остатков.
1. Какой остаток даёт: а) 2 по модулю 3; б) 2019 по модулю 10; в) –2 по модулю 3; г) –2019 по модулю 10?; д) 2 по модулю -3?; е) -2 по модулю -3?
2. Найдите остаток по модулю 7 следующих чисел: а) 7^{2019}; б) 1^{2019}; в) 8^{2019}; г) 2^{2019}; 5^{2019}; д) 3^{2019}; е) 4^{2019}.

Важной является идея перебора остатков. Она часто позволяет доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах.

3. Какие остатки может давать число n^2 при делении на 3 при целых n?

Какие остатки может давать число n^3 при делении на 9 при целых n?

Признаки делимости можно обобщить, сформулировав их в остатках для произвольного натурального *N*:

1) N сравнимо по модулю 9 со своей суммой цифр. То же самое верно для модуля 3.

2) N сравнимо по модулю 11 со своей знакопеременной суммой цифр. (Знакопеременная сумма цифр получается следующим образом: самая правая цифра идёт в неё со знаком «+», вторая справа со знаком «–», третья – снова со знаком «+» и т.д.)

3) N сравнимо по модулю 2^k с числом, составленным из своих k последних цифр. То же самое верно для модуля 5^k.

4. Известно, что число 65349_0712 делится а) на 9; б) на 3. Какая цифра может стоять на месте пропуска? Укажите все возможные варианты.

5. Делится ли число 32561698 на 12? Решите с помощью признака делимости: а) на 3; б) на 4.

6. Существует ли четырёхзначное простое число – палиндром (читается справа налево и слева направо одинаково)?

7. В каждом пункте укажите все возможные варианты ответа. а) Число 72*4* делится на 45. Какие цифры заменили звёздочками? в) Число 1*456* делится на 36. Какие цифры заменили звёздочками?

Вспомним, что такое десятичная запись числа:

8. Докажите, что $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ кратно 11.

***Простое число* – это натуральное число, имеющие ровно два различных натуральных делителя. Любое натуральное *n*>1 единственным образом раскладывается в произведение простых множителей. Этот факт называют *Основной теоремой арифметики*. *Каноническое разложение* натурального числа $\boldsymbol{n}$ на простые множители – это его запись в виде $\boldsymbol{n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}}$, где $\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ – все простые делители $\boldsymbol{n}$, расположенные в порядке возрастания, $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ – их степени. *Наибольший общий делитель* набора натуральных чисел (НОД) – это наибольшее число, на которое делится каждое из чисел набора. *Наименьшее общее кратное* набора натуральных чисел (НОК) – это наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из чисел набора. Два числа называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1. Числа некоторого набора *взаимно простые в совокупности*, если НОД всего набора чисел равен 1. Числа некоторого набора *попарно взаимно простые*, если НОД любой пары чисел из этого набора равен 1.**

1. Найдите а) НОД(24, 36, 50); б) НОК(24, 36, 50).

2. Докажите, что НОК(a, b)·НОД(a, b) = ab.

3. На сколько нулей оканчиваются число а)5!; б) 31!; в) 1000!?

4. Пусть a – чётное число, не делящееся на 4. Докажите, что у числа a поровну чётных и нечётных делителей.

5. Для набора чисел 6, 9, 33 и 77 укажите: а) все пары взаимно простых чисел; б) все тройки чисел, взаимно простых в совокупности; в) все тройки попарно взаимно простых чисел.

6. а) Даны взаимно простые числа. Обязательно ли они простые? б) Даны различные простые числа. Обязательно ли они взаимно простые? в) Даны три попарно взаимно простых числа. Верно ли, что они взаимно просты в совокупности? г) Даны три взаимно простых в совокупности числа.

Верно ли, что они попарно взаимно просты? д) Даны три взаимно простых в совокупности числа. Верно ли, что среди них есть хотя бы одна пара взаимно простых?

Выведем формулу количества делителей натурального числа:
7. Сколько натуральных делителей у числа, каноническое разложение которого на простые множители выглядит как ${p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\dots {p_k}^{a_k}$?
8. Найдите все натуральные числа, у которых количество делителей равно: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 12.
9. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно а) 12 натуральных делителей; б) 12 целых делителей; в) 12 нечётных натуральных делителей.

Задачи с МЭ

1. **(2020, 8.2)** В мешочке для игры лото 90 бочонков с числами от 1 до 90. Какое наименьшее количество бочонков нужно вынуть наугад из мешочка, чтобы гарантированно получить бочонок с числом, делящимся на 3 или на 5 (или на 3 и 5 одновременно)?
2**. (2019, 7.4)** Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Существует ли такое n, что $n\cdot s(n) = 100200300$?
3. **(2019, 9.1)** К восьмизначному числу 20192020 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. Укажите все возможные решения.
4. **(2020, 9.3)** Из натуральных чисел 1, 2, …, 101 выбирают группу чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух чисел из группы был больше двух. Каким может быть наибольшее количество чисел в такой группе?
5. **(2020, 10.4)** Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.