

**Региональная общественная организация
"Ассоциация победителей олимпиад"**

УТВЕРЖДАЮ

Президент РОО "АССОЦИАЦИЯ
ПОБЕДИТЕЛЕЙ ОЛИМПИАД"

А.А. Шишов

« 1 » « августа » 2021 г.



ПРОГРАММА

**дополнительного профессионального образования
(повышение квалификации)**

**Методика решения заданий второй части
профильного ЕГЭ по математике**

Автор: Низовцев А. Ю., преподаватель математики в Бауманской инженерной школе № 1580 и интеллектуальном клубе «Сигма», член оргкомитета олимпиады "Формула единства – Третье тысячелетие", автор и организатор олимпиады "Шаг в будущее", лектор ресурсного центра Математической вертикали, член комиссии по проверке регионального этапа ВсОШ в Москве.

Москва, 2021

Раздел 1. Характеристика программы

1.1. Цель реализации программы

Совершенствование профессиональных компетенций обучающихся в области методики решения заданий второй части профильного ЕГЭ по математике.

Совершенствуемые компетенции

№	Компетенция	Направление подготовки «Педагогическое образование»
		44.03.01 Бакалавриат
		Код компетенции
1	Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении	ОПК-5

1.2. Планируемые результаты обучения

№		Направление подготовки «Педагогическое образование»
		44.03.01 Бакалавриат
		Код компетенции
1	Уметь: • решать задачи по темам второй части профильного ЕГЭ • составлять планы уроков по темам второй части профильного ЕГЭ по математике • анализировать оценку успешности обучающихся • корректировать планы уроков в зависимости от возможных трудностей в обучении Знать: • методику решения заданий второй части профильного ЕГЭ по математике. • методику планирования уроков по темам второй части профильного ЕГЭ по математике	ОПК-5

	• оценку успешности обучающихся и корректировку возможных трудностей в обучении	
--	---	--

1.3. Категория обучающихся: слушатели, имеющие высшее образование или получающие высшее образование.

1.4. Форма обучения: заочная с применением ДОТ.

1.5. Режим занятий: 4 часа в неделю.

1.6 Срок освоения (трудоемкость) программы: 54 часа.

Календарный учебный график составляется на каждую группу отдельно.

Раздел 2. Содержание программы

2.1. Учебный (тематический) план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего час.	Виды учебных занятий, учебных работ		Формы контроля
			Лекции / видео лекции	Самос тоятел ьная работа	
1.	Методика решения задачи №15	3	2	1	Самостояте льная работа
2.	Методика решения задачи №19 (часть 1)	5	2	3	Самостояте льная работа
3.	Методика решения задачи №19 (часть 2)	5	2	3	Самостояте льная работа
4.	Методика решения задачи №19 (часть 3)	3	2	1	Самостояте льная работа
5.	Методика решения задачи №14 (часть 1)	3	2	1	Самостояте льная работа
6.	Методика решения задачи №14 (часть 2)	3	2	1	Самостояте льная работа
7.	Самостоятельная работа	3		3	Самостояте льная работа

8.	Методика решения задачи №18 (часть 1)	5	2	3	Самостоятельная работа
9.	Методика решения задачи №18 (часть 2)	5	2	3	Самостоятельная работа
10.	Методика решения задачи №18 (часть 3)	5	2	3	Самостоятельная работа
11.	Методика решения задачи №17 (часть 1)	4	2	2	Самостоятельная работа
12.	Методика решения задачи №17 (часть 2)	4	2	2	Самостоятельная работа
13.	Итоговое задание	6		6	Итоговое задание
	Итого часов	54			

2.2. Учебная программа

Наименование тем	Виды учебных занятий, учебных работ	Содержание
Тема 1 Методика решения задачи №15	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 1 час	Метод рационализации в показательных и логарифмических неравенствах.
Тема 2. Методика решения задачи №19 (часть 1)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	Десятичная запись числа, прогрессий, среднего арифметического и среднего геометрического.
Тема 3 Методика решения задачи №19 (часть 2)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	Тема делимости. Решение диофантовых уравнений. Разбор сложных задач.
Тема 4 Методика решения задачи №19 (часть 3)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 1 час	Разбор примеров. Решение задач ЕГЭ прошлых лет.

Тема 5 Методика решения задачи №14 (часть 1)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 1 час	Теоретический материал по углам. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.
Тема 6 Методика решения задачи №14 (часть 1)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 1 час	Расстояния и способы их нахождения.
Тема 7 Самостоятельна я работа	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	
Тема 8 Методика решения задачи №18 (часть 1)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	Графический метод решения задач с параметром. Применение графического метода.
Тема 9. Методика решения задачи №18 (часть 2)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	Графики. Метод областей. Разбор примеров и решение задач.
Тема 10 Методика решения задачи №18 (часть 3)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 3 часа	Решение задач ЕГЭ прошлых лет. Применение изученных методов на практике.
Тема 11 Методика решения задачи №17 (часть 1)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 2 часа	Экономическая задача. Два способа решения задач на кредиты.
Тема 12. Методика решения задачи №17 (часть 2)	Видеолекция 2 часа Самостоятельная работа 2 часа	Решение задач ЕГЭ прошлых лет. Решение задач на оптимизацию.
Итоговое задание	Самостоятельная работа 6 часов	Выполнение итогового задания

Раздел 3. Формы аттестации и оценочные материалы

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.

1) Решите неравенство $\log x + 1(x-1) \geq 0$

2) Решите неравенство $(x^2+3x-10) \cdot \log_{0,5}(x^2-1) \cdot \log(x^2-1)(x+2) \leq 0$

3) Решите неравенство

$$\log(x-2)(x+3) \geq 1/(\log x^2(x-2))$$

Задание 2.

1) Сколько существует двузначных чисел, которые ровно в 9 раз больше суммы своих цифр? А сколько существует таких трёхзначных чисел?

2) В натуральном числе поменяли местами две цифры, стоящие через одну, и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что разность всегда делится на 99.

3) В примере на умножение двузначных чисел одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные цифры – разными. Докажите, что при вычислении была допущена ошибка: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}$.

4) Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$, такие, что $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2011$.

5) Существует ли натуральное число, которое при зачёркивании первой цифры уменьшается ровно в 2011 раз?

6) В арифметической прогрессии $a_1 = -85$, a_{19} – её первый положительный член. Какие значения может принимать разность прогрессии?

7) Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12. Найдите наибольшее значение произведения этих чисел.

8) В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвёртого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

9) Три числа, сумма которых равна 12, образуют арифметическую прогрессию. Если второе оставить без изменения, а первое и третье увеличить на 1, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

10) Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все её члены увеличить на 1, то сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d , где d – разность прогрессии, а n – число её членов?

11) Средний рост пяти игроков баскетбольной команды – 2,04 м. После замены игрока, рост которого равен среднему, средний рост увеличился до 2,08 м. Каков рост нового игрока?

- 12) Среднее арифметическое десяти различных положительных целых чисел равняется 10. Чему может равняться наибольшее среди этих чисел?
- 13) Известно, что произведение двух положительных чисел равно 16. Какое наименьшее значение может принимать их сумма?
- 14) Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равно 1. Докажите, что их сумма больше или равна n .
- 15) Найдите наибольшее натуральное число, каждая не крайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

Задание 3.

3.1

- 1) Какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 5?
- 2) Какое наименьшее натуральное число не является делителем $50!$ ($n!$ Обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)?
- 3) Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.
- 4) Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.
- 5) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

3.2

- 1) Решите уравнение в натуральных числах: $2^x + 3^x + 4^x = y^2$
- 2) Решите уравнение в натуральных числах: $3^x + 55 = y^2$
- 3) Решите уравнение в натуральных числах: $xy(x+y) = 120$
- 4) Решите уравнение в целых числах: $3^x = 1 + y^2$
- 5) Решите уравнение в целых числах: $3^x + 7 = 2^y$

Задание 4.

- 1) Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами

размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

а) Могло ли получиться так, что склад объемом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?

б) Могло ли получиться так, что на складе объемом 400 невозможно разместить 133 контейнера?

в) Какой наибольший процент объема любого склада объемом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

2) На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?

в) Найдите наибольшее среднее арифметическое всех чисел.

Задание 5.

1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 , где D_1 и E_1 – соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 .

2) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1 .

3) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1 .

4) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $SA = 7$. На ребрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причем $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC . Найдите угол между плоскостями α и SBC .

5) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 13$, $BC = 24$. Высота призмы равна 5. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1 .

6) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что

$A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка

T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$. Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 .

Задание 6.

- 1) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG , где G – середина ребра SC .
- 2) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1 .
- 3) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1 .
- 4) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все ребра которой равны 4, точка N – середина ребра AC , точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP .
- 5) Дана пирамида $SABC$, в которой $SC=SB=AB=AC=\sqrt{19}$, $SA=BC=2\sqrt{6}$. Найдите расстояние между ребрами BC и SA .
- 6) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA=6$. На ребрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причем $AK:KB=SM:MC=2:7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA . Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

Задание 7. (Урок 7. Самостоятельная работа)

- 1) В примере на умножение двухзначных чисел одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные цифры – разными буквами. Докажите, что при вычислении была допущена ошибка:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}.$$

- 2) Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.
- 3) Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

А) Может ли получиться так, что склад объемом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?

Б) Может ли получиться так, что на складе объемом 400 невозможно разместить 133 контейнера?

В) Какой наибольший процент объема любого склада объемом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

4) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 5$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$.

Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

5) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все ребра которой равны 4, точка N – середина ребра AC , точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Задание 8.

1) Определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \frac{2-x}{x^2-x-2}$ ровно две точки пересечения.

2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\ln |\ln |x|| = ax$ имеет ровно три решения.

3) Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\{(x+1)^2 + (|y-1|-1)^2 = 4 \mid y = b|x+2| + a\}$$

имеет решение.

4) При каких значениях m система имеет ровно одно решение?

$$\{\sqrt{(x+15)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-8)^2} = 17 \mid x^2 + y^2 = m^2\}$$

5) Найти все значения a , при которых уравнение имеет ровно одно решение:

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

6) (*) При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} (x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} (2|x-a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

Задание 9.

1) Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leq a$ следует неравенство $(|x|+4)(|y|+4) \leq 49$.

2) При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 3a)x + 2a^2 - 2a < 0 \\ ax = 1 \end{cases}$$

имеет решения?

3) Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x + y + a)^2 + (x - y - a)^2 \leq (a - 1)^2 \\ (x + y - 2a)^2 + (x - y + 3a)^2 \leq (8a - 5)^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

4) При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением $|2x + y| + |x - y + 3| \leq p$, будет равна 24?

5) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

6) Найдите все значения c , при каждом из которых множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65}{x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79} \leq 0 \\ (x - c)(y + c) = 0, \end{cases}$$

является отрезком.

Задание 10.

1) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| x + \frac{a^2}{x} + 1 \right| + \left| x + \frac{a^2}{x} - 1 \right| = 2$$

имеет хотя бы один корень.

2) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \cdot \sin x = \sqrt{x - a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

3) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x - 1) \cdot \sqrt{3x - a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

4) Найдите все положительные значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\frac{x-2}{ax^2-(a^2+1)x+a} \geq 0$ является некоторый луч.

5) Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 2y - 8) = |x|(2y - 8) \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

6) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 - x + 2a}{x + a} + 1 \right| \leq 2$$

не имеет решений на интервале $(-2; -1)$.

Задание 11.

1) В начале года Пётр взял в банке кредит 3,6 млн рублей с процентной ставкой 10% годовых на 3 года с погашением кредита по следующей схеме:

- в начале года банк увеличивает долг на 10%;
- выплаты производятся в конце каждого года;
- каждая следующая выплата на 10% больше предыдущей.

Сколько рублей переплатил Пётр банку, погасив свой кредит по указанной схеме за три года?

2) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что если ежегодно выплачивать по 72000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 122000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите число r .

3) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что если ежегодно выплачивать по 50000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 82000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите число r .

4) Вклад в размере 5 млн руб. планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 20% по сравнению с его значением в начале года. Кроме того, в середине первого и второго годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на P млн руб., где P — целое число. Найдите наименьшее значение P , при котором банк за 4 года начислит на вклад больше 8 млн рублей.

5) Клиент планирует взять в банке льготный кредит на целое число миллионов рублей сроком на 5 лет. В середине каждого года действия кредита долг клиента возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов клиент выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов клиент выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат клиента превысит 20 млн рублей.

Задание 12.

1) Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{2}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

2) В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее

количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

3) В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

4) Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 9)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

Итоговое задание

1. Найдите все значения a , при которых система уравнений имеет ровно два различных решения:

$$\{(x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0 \quad 2ay + x = 1 + a^2$$

2. Найдите все значения c , при каждом из которых множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65}{x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79} \leq 0 \\ (x - c)(y + c) = 0 \end{cases},$$

является отрезком.

3. Найдите все положительные a , при которых уравнение

$$\frac{2\pi a + \arcsin \arcsin(\sin \sin x) + 2 \arccos \arccos(\cos \cos x) - ax}{\lg^2 x + 1} = 0$$

имеет ровно три различных решения, принадлежащих множеству $(-\infty; 7\pi]$.

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины рёбер AB и $B_1 C$ соответственно, а точка P расположена на ребре DC так, что $CP = 3PD$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $EF P$.

5. Точка P — середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с отношением рёбер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Найдите угол между прямой PC_1 и плоскостью CDA_1 .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань — равносторонний треугольник со стороной 2. Точка Q — центр грани SCD . Найдите расстояние и угол между прямыми BC и AQ .

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 6 млн рублей?

8. У Робинзона есть два участка, каждый площадью 10 соток. На каждом участке можно выращивать батат и кукурузу, участки можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность батата на первом участке составляет 150 кг/сотка, а на втором — 120 кг/сотка. Урожайность кукурузы на первом участке составляет 120 кг/сотка, а на втором — 150 кг/сотка. Робинзон может обменивать батат в соотношении 0,5 кг свинины за 1 кг батата, а кукурузу — в соотношении 0,3 кг свинины за 1 кг кукурузы. Какое наибольшее количество свинины может получить Робинзон, занимаясь только выращиванием батата и кукурузы?

9. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_6$ состоит из чисел множества $\{0, 1, \dots, 9\}$. Пусть A_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $A_1 = 1$, $A_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $A_3 = 1, 6$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $A_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение A_3 .

10. В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, не превосходящее 6. Аня в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Боря в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Ани получиться в два раза больше, чем сумма у Бори?

б) Может ли сумма у Ани получиться в шесть раз больше, чем сумма у Бори?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Ани может быть больше, чем

сумма у Бори?

Раздел 4. Организационно-педагогические условия реализации программы

Список литературы:

1. Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. Асар, 2004.
2. Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа 14 (С2). Геометрия. Стереометрия (профильный уровень). Феникс, 2016.
3. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. МЦНМО, 2002.
4. Высоцкий В.С. Задача с параметром при подготовке к ЕГЭ. Научный мир, 2013.
5. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Издательство «АСА», 1994.
6. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. ИЛЕКСА, 2005.
7. Козко А. И., Панфёров В. С., Сергеев И. Н., Чирский В. Г. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. МЦНМО, 2018.
8. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. В 3-х т. Планиметрия. Стереометрия. Треугольники и тетраэдры. МЦНМО, 2018.
9. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии: Учебное пособие. МЦНМО, 2016.
- 10.Пратусевич М.Я., Вольфсон Г.И., Рукшин С.Е. ЕГЭ 2021 Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень). ФГОС. МЦНМО, 2020.
- 11.Фалин Г. И., Фалин. А. И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. БИНОМ, 2020.
- 12.Шестаков С. А. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. МЦНМО, 2005.
- 13.Шестаков С.А. Математика. Задачи с параметром. Задача 18. Профильный уровень. МЦНМО, 2021.
- 14.Шестаков С. А. ЕГЭ 2021 Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень). МЦНМО, 2021.

5. Материально-технические условия реализации программы

№ п/п	Место проведения занятий	Оборудование учебного кабинета для проведения вебинаров с перечнем основного оборудования
----------	-----------------------------	---

1	Олимпийский пр., 11	Ноутбук LenovoV580c 59381128 i5 3230M/4/500/DVD-RW/GT740M/WIFI/BT/Win8/15/6". Многофункциональное устройство HP LaserJet Pro M1132 MFP (CE847A)
---	---------------------	--